

LE PROBLÈME DES DIVISEURS POUR DES FORMES BINAIRES DE DEGRÉ 4

par

R. de la Bretèche & T.D. Browning

À la mémoire affectueuse de George Greaves

Résumé. — Nous étudions l'ordre moyen du nombre de diviseurs des valeurs de certaines formes binaires quartiques qui ne sont pas irréductibles sur \mathbb{Q} .

Abstract. — We study the average order of the divisor function, as it ranges over the values of binary quartic forms that are reducible over \mathbb{Q} .

Table des matières

| | |
|--|----|
| 1. Introduction | 1 |
| 2. Méthode et autres résultats | 3 |
| 3. Propriétés des fonctions ϱ^* et ϱ | 8 |
| 4. Interprétation de la constante | 15 |
| 5. Démonstration du Théorème 2 | 17 |
| 6. Démonstration du Théorème 3 | 22 |
| 7. Démonstration du Théorème 1 | 27 |
| 8. Démonstration des corollaires | 32 |
| Références | 37 |

1. Introduction

Soient $L_1, L_2 \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$ deux formes linéaires non proportionnelles où $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $Q \in \mathbb{Z}[\mathbf{x}]$ une forme quadratique irréductible sur \mathbb{Q} et \mathcal{R} une région bornée convexe de \mathbb{R}^2 . Nous nous proposons d'estimer asymptotiquement lorsque X tend vers $+\infty$ la somme

$$T(X) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap X\mathcal{R}} \tau(L_1(\mathbf{x})L_2(\mathbf{x})Q(\mathbf{x})),$$

où $X\mathcal{R} := \{X\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathcal{R}\}$. Ici, τ désigne la fonction nombre de diviseurs.

Cette estimation résultera de l'étude de la somme

$$S(X) := S(X; L_1, L_2, Q, \mathcal{R}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap X\mathcal{R}} \tau(L_1(\mathbf{x}))\tau(L_2(\mathbf{x}))\tau(Q(\mathbf{x})).$$

Ce travail a certains points communs avec [2] où nous généralisons le travail de Heath-Brown [5] concernant les sommes

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap X\mathcal{R}} r(L_1(\mathbf{x}))r(L_2(\mathbf{x}))r(L_3(\mathbf{x}))r(L_4(\mathbf{x})), \quad (1.1)$$

lorsque les L_i sont des formes linéaires non proportionnelles deux à deux. Ici la quantité $r(n)$ désigne le nombre de représentations de n comme une somme de deux carrés.

Dans toute la suite, nous ferons sur les formes L_1 , L_2 , Q et \mathcal{R} les hypothèses minimales suivantes :

(H1) \mathcal{R} est un ouvert borné, convexe avec une frontière définie par une fonction continuellement différentiable par morceaux,

(H2) L_1 et L_2 ne sont pas proportionnelles et Q est irréductible sur \mathbb{Q} ,

(H3) $L_i(\mathbf{x}) > 0$ et $Q(\mathbf{x}) > 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{R}$,

et nous noterons

$$\begin{aligned} L_1(\mathbf{x}) &:= a_1x_1 + b_1x_2, \\ L_2(\mathbf{x}) &:= a_2x_1 + b_2x_2, \\ Q(\mathbf{x}) &:= a_3x_1^2 + b_3x_2^2 + c_3x_1x_2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

avec

$$\Delta = \text{disc}(Q) = c_3^2 - 4a_3b_3. \quad (1.3)$$

Nous introduisons les notations, lorsque $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{N}^3$,

$$\Lambda(\mathbf{d}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 : d_i \mid L_i(\mathbf{x}), d_3 \mid Q(\mathbf{x})\} \quad (1.4)$$

et

$$\varrho(\mathbf{d}) = \varrho(\mathbf{d}; L_1, L_2, Q) := \#(\Lambda(\mathbf{d}) \cap [0, d_1d_2d_3]^2). \quad (1.5)$$

Le résultat principal de notre article est le suivant.

Théorème 1. — Soit $\varepsilon > 0$. Lorsque L_1, L_2, Q, \mathcal{R} satisfont (H1)–(H3) et lorsque $X \geq 2$, on a

$$T(X) = 2C \text{vol}(\mathcal{R})X^2(\log X)^3 + O(X^2(\log X)^{2+\varepsilon}),$$

où la constante implicite dans le O dépend de ε , des formes linéaires L_1, L_2, Q et de la borne supérieure de \mathcal{R} et où

$$C := \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \left(1 + \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \frac{\varrho(1, p^\nu, 1) + \varrho(p^\nu, 1, 1) + \varrho(1, 1, p^\nu)}{p^{2\nu}}\right).$$

Ce problème s'inscrit dans le cadre plus général de l'estimation de la somme

$$T_F(X) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap X\mathcal{R}} \tau(F(\mathbf{x}))$$

lorsque F est une forme binaire de degré 4 de $\mathbb{Z}[\mathbf{x}]$. Lorsque F est irréductible sur \mathbb{R} , Daniel [4] a montré

$$T_F(X) = 4C_F \text{vol}(\mathcal{R})X^2 \log X + O(X^2 \log \log X)$$

lorsque $\mathcal{R} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |f(\mathbf{x})| \leq 1\}$ et

$$C_F = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \frac{\varrho_F(p^\nu)}{p^{2\nu}},$$

avec $\varrho_F(d) := \#\{\mathbf{x} \in [0, d]^2 : d \mid F(\mathbf{x})\}$.

Nous sommes convaincus que les méthodes développées dans cet article seront utiles pour établir une estimation asymptotique de $T_F(X)$ lorsque F est une forme binaire de degré 4 de $\mathbb{Z}[\mathbf{x}]$ qui n'est pas traitée par notre résultat ou celui de Daniel.

Remerciements. — Une partie de ce travail a été réalisée lors de la venue du deuxième auteur à l'Université Paris 7–Denis Diderot et à l'Université Paris 6–Pierre et Marie Curie. Que ces institutions soient ici chaleureusement remerciées pour leur accueil et leur soutien financier. Le deuxième auteur bénéficie du soutien de la bourse EPSRC numérotée EP/E053262/1.

2. Méthode et autres résultats

Pour établir le Théorème 1, nous estimons des sommes généralisant $S(X)$ en prêtant une attention particulière à l'uniformité par rapport aux différents paramètres. Pour cela, nous introduisons les quantités suivantes

$$L_\infty = L_\infty(L_1, L_2, Q) := \max\{\|L_1\|, \|L_2\|, \|Q\|\} \quad (2.1)$$

où $\|\cdot\|$ désigne le maximum de la valeur absolue des coefficients de la forme considérée, et

$$r_\infty = r_\infty(\mathcal{R}) := \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}} \max\{|x_1|, |x_2|\}, \quad (2.2)$$

$$r' = r'(L_1, L_2, Q, \mathcal{R}) := \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}} \max\{|L_1(\mathbf{x})|, |L_2(\mathbf{x})|, \sqrt{|Q(\mathbf{x})|}\}. \quad (2.3)$$

Dans toute la suite, nous considérerons, pour des ensembles V de \mathbb{R}^3 définis comme une intersection finie d'hyperplans à coefficients bornés, les sommes définies par

$$S(X; V) := S(X; L_1, L_2, Q, \mathcal{R}, V) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap X\mathcal{R}} \tau(L_1(\mathbf{x}), L_2(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}); V),$$

avec, lorsque $V \subseteq [0, 1]^3$,

$$\tau(L_1(\mathbf{x}), L_2(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}); V) := \# \left\{ \mathbf{d} \in \mathbb{N}^3 : \begin{array}{l} d_i \mid L_i(\mathbf{x}), \quad d_3 \mid Q(\mathbf{x}) \\ \left(\frac{\log d_1}{\log r'X}, \frac{\log d_2}{\log r'X}, \frac{\log d_3}{2 \log r'X} \right) \in V \end{array} \right\}.$$

La dépendance de $\tau(L_1(\mathbf{x}), L_2(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}); V)$ à X et \mathcal{R} sera toujours omise. Lorsque $V = [0, 1]^3$, nous avons $S(X, V) = S(X)$.

Théorème 2. — Soit $\varepsilon > 0$. Lorsque L_1, L_2, Q, \mathcal{R} satisfont (H1)–(H3), V est un sous-ensemble de $[0, 1]^3$ défini comme une intersection finie d'hyperplans à coefficients bornés et $r'X^{1-\varepsilon} \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} S(X; V) = & 2 \operatorname{vol}(\mathcal{R}) \operatorname{vol}(V) X^2 (\log r'X)^3 \prod_p \sigma_p \\ & + O\left(L_\infty^\varepsilon (r_\infty r' + r_\infty^2) X^2 (\log X)^2 \log \log X\right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

où

$$\sigma_p := \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \frac{\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3})}{p^{2\nu_1 + 2\nu_2 + 2\nu_3}}. \quad (2.5)$$

L'ensemble (1.4) n'est pas un réseau. L'étape essentielle de la preuve de cette estimation est de se ramener à un comptage sur des réseaux de \mathbb{Z}^2 en s'inspirant de l'important article [4].

Le Théorème 2 nous permet d'estimer des sommes plus générales de la forme

$$\begin{aligned} S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}; V) &= S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}; L_1, L_2, Q, \mathcal{R}, V) \\ &:= \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda(\mathbf{D}) \cap X\mathcal{R}} \tau\left(\frac{L_1(\mathbf{x})}{d_1}, \frac{L_2(\mathbf{x})}{d_2}, \frac{Q(\mathbf{x})}{d_3}; V\right), \end{aligned}$$

lorsque $\mathbf{d}, \mathbf{D} \in \mathbb{N}^3$ tels que $d_i \mid D_i$.

Considérons

$$\sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D}) := \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \frac{\varrho(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3})}{p^{2N_1+2N_2+2N_3}}, \quad (2.6)$$

avec

$$\lambda_i = v_p(d_i), \quad \mu_i = v_p(D_i), \quad N_i = \max\{\mu_i, \nu_i + \lambda_i\}. \quad (2.7)$$

Soit $\delta(\mathbf{D})$ le plus grand entier δ tel que

$$\Lambda(\mathbf{D}) \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 : \delta \mid (x_1, x_2)\}, \quad (2.8)$$

où (x_1, x_2) désigne, ici et dans toute la suite, le pgcd des entiers x_1 et x_2 . Lorsque L_1, L_2, Q des formes satisfont (H2), nous écrirons ℓ_1, ℓ_2, q des entiers et L_1^*, L_2^*, Q^* des formes primitives tels que

$$L_1 = \ell_1 L_1^*, \quad L_2 = \ell_2 L_2^*, \quad Q = q Q^*, \quad (2.9)$$

et utilisons la notation

$$\mathbf{D}' := \left(\frac{D_1}{(D_1, \ell_1)}, \frac{D_2}{(D_2, \ell_2)}, \frac{D_3}{(D_3, q)}\right). \quad (2.10)$$

Nous emploierons systématiquement la notation

$$D := D_1 D_2 D_3$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &:= \text{Res}(L_1, L_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1, \\ \Delta_{i3} &:= \text{Res}(L_i, Q) = a_3 b_i^2 + b_3 a_i^2 - c_3 a_i b_i = Q(-b_i, a_i). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Comme Q est irréductible, nous avons $\Delta_{i3} \neq 0$. De plus, comme L_1 et L_2 ne sont pas proportionnelles, on a $\Delta_{12} \neq 0$. Nous notons aussi

$$a(\mathbf{D}, \mathbf{\Delta}) := (D_1, \Delta_{12})(D_2, \Delta_{12})(D_3, \Delta(\Delta_{13}, \Delta_{23})), \quad (2.12)$$

avec $\mathbf{\Delta} := (\Delta, \Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{23})$ et Δ introduit en (1.3). Enfin, nous posons

$$a'(\mathbf{D}, \mathbf{\Delta}) := (D'_1, \Delta'_{12})(D'_2, \Delta'_{12})(D'_3, \Delta'(\Delta'_{13}, \Delta'_{23})), \quad (2.13)$$

où $\mathbf{\Delta}' := (\Delta', \Delta'_{12}, \Delta'_{13}, \Delta'_{23}) = (\Delta/q^2, \Delta_{12}/\ell_1 \ell_2, \Delta_{13}/\ell_1^2 q, \Delta_{23}/\ell_2^2 q)$. Autrement a' prend la valeur a après avoir rendu les formes L_1, L_2, Q primitives. À partir du Théorème 2, nous démontrerons le résultat suivant.

Théorème 3. — Soit $\varepsilon > 0$. Lorsque L_1, L_2, Q, \mathcal{R} satisfont (H1)–(H3), V est un sous-ensemble de $[0, 1]^3$ défini comme une intersection finie d'hyperplans à coefficients bornés, \mathbf{d} et \mathbf{D} tels que $d_i \mid D_i$ et $r'X^{1-\varepsilon} \geq 1$, on a

$$S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}; V) = 2 \operatorname{vol}(\mathcal{R}) \operatorname{vol}(V) X^2 (\log r'X)^3 \prod_p \sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D}) \\ + O\left(\frac{(DL_\infty)^\varepsilon}{\delta(\mathbf{D})} a'(\mathbf{D}, \Delta) (r_\infty r' + r_\infty^2) X^2 (\log X)^2 \log \log X\right).$$

De plus, on a $\prod_p \sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D}) \ll L_\infty^\varepsilon D^\varepsilon a'(\mathbf{D}, \Delta)$.

La somme $S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}; V)$ est directement reliée au cardinal des points à coordonnées entières sur la variété affine d'équation

$$L_i(\mathbf{x}) = d_i s_i t_i, \quad Q(\mathbf{x}) = d_3 s_3 t_3. \quad (2.14)$$

La constante attendue dans le terme principal de $S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}; V)$ peut être interprétée comme un produit convenable de densités locales avec $\omega_\infty(\mathcal{R}, V)$ la densité archimédienne associée à la variété définie par (2.14). Cette quantité sera explicitement définie en (4.1). De la même manière que dans [2] pour les sommes introduites en (1.1), nous montrons que le terme principal est bien celui qui est attendu.

Lorsque $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ et p un nombre premier, nous considérons

$$N_{\lambda, \mu}(p^n) := \# \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) \in (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})^8 : \begin{array}{l} L_i(\mathbf{x}) \equiv p^{\lambda_i} s_i t_i \pmod{p^n} \\ Q(\mathbf{x}) \equiv p^{\lambda_3} s_3 t_3 \pmod{p^n} \\ p^{\mu_i} \mid L_i(\mathbf{x}), p^{\mu_3} \mid Q(\mathbf{x}) \end{array} \right\},$$

et

$$\omega_{\lambda, \mu}(p) := \lim_{n \rightarrow \infty} p^{-5n - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3} N_{\lambda, \mu}(p^n).$$

Cette quantité correspond à la densité p -adique associée à la variété définie par (2.14).

Théorème 4. — Soient L_1, L_2, Q, \mathcal{R} satisfont (H1)–(H3) et \mathbf{d}, \mathbf{D} tels que $d_i \mid D_i$. On a $\omega_\infty(\mathcal{R}, V) = 2 \operatorname{vol}(\mathcal{R}) \operatorname{vol}(V)$ et $\omega_{\lambda, \mu}(p) = \sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D})$, pour tout p .

Le Théorème 3 permet facilement de démontrer d'autres résultats dont nous aurons besoin dans un travail ultérieur concernant la conjecture de Manin et qui ont été à l'origine de ce travail.

Le premier concerne l'estimation des sommes

$$S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}; V) = S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}; L_1, L_2, Q, \mathcal{R}, V) \\ := \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \Lambda(\mathbf{D}) \cap X\mathcal{R} \\ (x_1, x_2) = 1}} \tau\left(\frac{L_1(\mathbf{x})}{d_1}, \frac{L_2(\mathbf{x})}{d_2}, \frac{Q(\mathbf{x})}{d_3}; V\right),$$

lorsque $\mathbf{d}, \mathbf{D} \in \mathbb{N}^3$ tels que $d_i \mid D_i$. Pour exprimer notre résultat, nous introduisons

$$\varrho^*(\mathbf{d}) = \varrho^*(\mathbf{d}; L_1, L_2, Q) \\ := \#\{\mathbf{x} \in \Lambda(\mathbf{d}) \cap [0, d_1 d_2 d_3]^2 : (x_1, x_2, d_1 d_2 d_3) = 1\}. \quad (2.15)$$

Lorsque $v_p(D) \geq 1$, nous définissons

$$\sigma_p^*(\mathbf{d}, \mathbf{D}) := \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \frac{\varrho^*(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3})}{p^{2N_1 + 2N_2 + 2N_3}}, \quad (2.16)$$

où les N_i sont définis par (2.7) alors que lorsque $v_p(D) = 0$

$$\sigma_p^*(\mathbf{d}, \mathbf{D}) := \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \left\{1 - \frac{1}{p^2} + \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 \\ \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \geq 1}} \frac{\varrho^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3})}{p^{2\nu_1 + 2\nu_2 + 2\nu_3}}\right\}. \quad (2.17)$$

Corollaire 1. — Soit $\varepsilon > 0$. Lorsque L_1, L_2, Q, \mathcal{R} satisfont (H1)–(H3), V est un sous-ensemble de $[0, 1]^3$ défini comme une intersection finie d'hyperplans à coefficients bornés, \mathbf{d} et \mathbf{D} tels que $d_i \mid D_i$ et $r'X^{1-\varepsilon} \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}; V) &= 2 \operatorname{vol}(\mathcal{R}) \operatorname{vol}(V) X^2 (\log r'X)^3 \prod_p \sigma_p^*(\mathbf{d}, \mathbf{D}) \\ &\quad + O\left((DL_\infty)^\varepsilon a'(\mathbf{D}, \mathbf{\Delta})(r_\infty r' + r_\infty^2) X^2 (\log X)^{2+\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Enfin, but ultime et motivation principale de cet article, nous estimons la somme

$$T_g^*(X; V) = \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap X\mathcal{R} \\ (x_1, x_2) = 1}} g(L_1(\mathbf{x}), L_2(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}); V).$$

où $g = \tau * h$ est une fonction arithmétique multiplicative proche de τ au sens de la convolution, $V \subseteq [0, 1]^3$ et

$$g(L_1(\mathbf{x}), L_2(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}); V) := \sum_{\substack{d \mid L_1(\mathbf{x})L_2(\mathbf{x})Q(\mathbf{x}) \\ d_i = (d, L_i(\mathbf{x})), d_3 = (d, Q(\mathbf{x})) \\ \left(\frac{\log d_1}{\log r'X}, \frac{\log d_2}{\log r'X}, \frac{\log d_3}{2 \log r'X}\right) \in V}} (1 * h)(d),$$

de sorte que $g(L_1(\mathbf{x}), L_2(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}); [0, 1]^3) = g(L_1(\mathbf{x})L_2(\mathbf{x})Q(\mathbf{x}))$.

Nous introduisons le cardinal $\varrho_p^\dagger(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ défini lorsque $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \geq 0$ par

$$\varrho_p^\dagger(\nu_1, \nu_2, \nu_3) := \# \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap [0, p^{\nu+1})^2 : \begin{array}{l} p^{\nu_i} \parallel L_i(\mathbf{x}), \\ p^{\nu_3} \parallel Q(\mathbf{x}), \\ (p, x_1, x_2) = 1 \end{array} \right\}.$$

Ici, pour ν et n la relation $p^\nu \parallel n$ signifie que $v_p(n) = \nu$. Nous introduisons aussi la densité $\overline{\varrho}_p^\dagger(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ définie par

$$\overline{\varrho}_p^\dagger(\nu_1, \nu_2, \nu_3) := \frac{1}{p^{2(\nu+1)}} \varrho_p^\dagger(\nu_1, \nu_2, \nu_3).$$

Cette quantité s'exprime en fonction de la fonction ϱ^* grâce à la formule

$$\overline{\varrho}_p^\dagger(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \{0, 1\}^3} (-1)^{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} \frac{\varrho^*(p^{\nu_1 + \sigma_1}, p^{\nu_2 + \sigma_2}, p^{\nu_3 + \sigma_3})}{p^{2(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)}}, \quad (2.18)$$

avec la convention $\varrho^*(1, 1, 1) = 1 - 1/p^2$.

Nous considérons les fonctions g telles que la fonction $h = g * \mu * \mu$ satisfasse

$$\sum_{d \in \mathbb{N}} \frac{|h(d)|}{d^{1/2 - \eta_0}} \ll 1 \quad (2.19)$$

pour une constante $\eta_0 > 0$.

Corollaire 2. — Soient $\varepsilon > 0$, L_1, L_2, Q, \mathcal{R} satisfaisant (H1)–(H3), V est un sous-ensemble de $[0, 1]^3$ défini comme une intersection finie d'hyperplans à coefficients bornés et g une fonction multiplicative satisfaisant (2.19) pour un $\eta_0 > 0$ fixé. Lorsque $X \geq 2$, on a

$$T_g^*(X; V) = 2C^* \text{vol}(\mathcal{R}) \text{vol}(V) X^2 (\log X)^3 + O(X^2 (\log X)^{2+\varepsilon}),$$

où la constante implicite dans le O dépend des formes linéaires L_1, L_2, Q , de la borne supérieure de \mathcal{R} et des constantes η_0 et ε et où

$$C^* := \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \left\{ \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} g(p^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}) \bar{g}_p^\dagger(\nu_1, \nu_2, \nu_3) \right\}. \quad (2.20)$$

Le Corollaire 2 permet d'avoir une version du Théorème 1 avec une somme restreinte aux couples à coordonnées premières entre elles en prenant $g = \tau$ et $V = [0, 1]^3$.

Le résultat suivant permet d'expliciter comment on peut faire apparaître des conditions portant sur $\log \max\{|x_1|, |x_2|\}$ dans le volume V . Soit la somme

$$T'_g(X; V') = \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap X\mathcal{R} \\ (x_1, x_2)=1}} \frac{g'(L_1(\mathbf{x}), L_2(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}); V')}{\max\{|x_1|, |x_2|\}^2}.$$

où $V' \subseteq [0, 1]^4$ et

$$g'(L_1(\mathbf{x}), L_2(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}); V') := \sum_{\substack{d|L_1(\mathbf{x})L_2(\mathbf{x})Q(\mathbf{x}) \\ d_i=(d, L_i(\mathbf{x})), d_3=(d, Q(\mathbf{x})) \\ \left(\frac{\log d_1}{\log Y}, \frac{\log d_2}{\log Y}, \frac{\log d_3}{2 \log Y}, \frac{\log \max\{|x_1|, |x_2|\}}{\log Y}\right) \in V'}} (1 * h)(d).$$

La définition de cette fonction dépend de Y qui dépendra de X . Nous notons aussi

$$V'_0(u) := \{\mathbf{t} \in [0, 1]^4 : t_i \leq t_4 \leq u \quad (1 \leq i \leq 3)\}.$$

Nous déduisons du Corollaire 2 l'estimation de $T'_g(X; V')$ suivante.

Corollaire 3. — Soient $\varepsilon > 0$, L_1, L_2, Q, \mathcal{R} satisfaisant (H1)–(H3) tel que $r' \asymp 1$, V' est un sous-ensemble de $[0, 1]^4$ défini comme une intersection finie d'hyperplans à coefficients bornés et g une fonction multiplicative satisfaisant (2.19) pour un $\eta_0 > 0$ fixé. Lorsque $2 \leq X \leq Y \leq X^{1/\varepsilon}$, on a

$$T'_g(X; V') = 4C^* \text{vol}(\mathcal{R}) \text{vol}(V' \cap V'_0(\log X / \log Y)) (\log Y)^4 + O((\log X)^{3+\varepsilon}),$$

où la constante implicite dans le O dépend des formes linéaires L_1, L_2, Q , de la borne supérieure de \mathcal{R} et des constantes η_0 et ε et où C^* est définie en (2.20).

Ce corollaire est un des points clés de [3] dans lequel les auteurs établissent une formule asymptotique pour le nombre de points rationnels de hauteur contrôlée sur une surface del Pezzo de degré 4 non-singulière. Pour cette application, il est important d'avoir le choix de l'ensemble V .

Détaillons maintenant le contenu de l'article. Dans la section 3, nous énonçons et démontrons les propriétés utiles de ϱ^* et ϱ . Cela permet alors de montrer la convergence du produit eulérien intervenant dans l'expression du terme principal du Théorème 2. Dans la section 4, une interprétation géométrique de la constante du Théorème 3 est donnée pour démontrer le Théorème 4. La section 5 est le cœur de l'article qui contient la démonstration du Théorème 2. La démonstration du Théorème 3, qui est détaillée dans la section 6, repose sur une manipulation délicate qui permet de se ramener à des sommations sur des réseaux puis à des sommes traitées par le Théorème 2 après changement de variables. La fin de la section est consacrée au calcul explicite de la constante intervenant dans le terme principal. On trouvera la démonstration du Théorème 1 à la section 7. Celle-ci consiste à exprimer la somme $T(X)$ en fonction des sommes estimées au Théorème 3. La section 8 contient la démonstration des trois corollaires.

3. Propriétés des fonctions ϱ^* et ϱ

Nous rappelons les définitions (1.5) et (2.15). Nous rassemblons ici les informations dont nous aurons besoin concernant la fonction ϱ qui a été notamment étudiée dans [4], [6] et [7]. Dans la plupart des cas traités dans la littérature, il est supposé que les formes sont primitives c'est-à-dire que les coefficients de chaque forme linéaire sont premiers entre eux. Nous attacherons une importance toute particulière à l'uniformité des relations par rapport aux coefficients des formes L_1, L_2, Q .

Le lemme suivant permet de se ramener à des formes primitives.

Lemme 1. — Soient L_1, L_2, Q des formes satisfaisant (H2) et la notation (2.9). Alors, lorsque $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^3$ et $d'_i = d_i/(d_i, \ell_i)$, $d'_3 = d_3/(d_3, q)$, on a

$$\frac{\varrho(\mathbf{d}; L_1, L_2, Q)}{(d_1 d_2 d_3)^2} = \frac{\varrho(\mathbf{d}'; L_1^*, L_2^*, Q^*)}{(d'_1 d'_2 d'_3)^2}.$$

La démonstration est immédiate, nous n'indiquons pas les détails. Les fonctions ϱ et ϱ^* sont multiplicatives. Nous pouvons donc nous contenter de les étudier sur des triplets de puissance de nombre premier. Nous rappelons les notations (2.11).

Lemme 2. — Soient L_1, L_2, Q des formes primitives satisfaisant (H2).

1) Alors pour tout p premier et $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, on a

$$\varrho^*(p^\nu, 1, 1) = \varrho^*(1, p^\nu, 1) = \varphi(p^\nu).$$

2) Lorsque $p \nmid 2\text{disc}(Q)$ et $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, alors on a

$$\varrho^*(1, 1, p^\nu) = \varphi(p^\nu) \left\{ 1 + \left(\frac{\text{disc}(Q)}{p} \right) \right\}.$$

De plus si p est un facteur impair de $\text{disc}(Q)$, on a

$$\varrho^*(1, 1, p^\nu) \leq 2\varphi(p^\nu) p^{\min\{\lfloor v_p(\text{disc}(Q))/2 \rfloor, \lfloor \nu/2 \rfloor\}}.$$

Nous avons aussi

$$\varrho^*(1, 1, 2^\nu) \leq 2^{\nu+2}.$$

3) Pour tout p , on a

$$\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) = \sum_{0 \leq k \leq \max\{\nu_1, \nu_2, \lceil \nu_3/2 \rceil\}} \varrho^*(p^{\max\{\nu_1-k, 0\}}, p^{\max\{\nu_2-k, 0\}}, p^{\max\{\nu_3-2k, 0\}}) p^{m_k}$$

avec $m_k := 2(\min\{\nu_1, k\} + \min\{\nu_2, k\} + \min\{\nu_3, 2k\} - k)$.

4) Pour tout p premier, nous avons

$$\varrho^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) = 0$$

lorsqu'il existe $1 \leq i < j \leq 3$ tels que $v_p(\Delta_{ij}) < \min\{\nu_i, \nu_j\}$. En particulier, cette égalité est satisfaite lorsque $p \nmid \Delta_{13}\Delta_{23}\Delta_{12}$ et $\#\{i : \nu_i \geq 1\} \geq 2$.

5) Pour tout p premier et $\nu_3 \leq \max\{\nu_1, \nu_2\}$, nous avons

$$\varrho^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \leq \varphi(p^{\nu_1+\nu_2+\nu_3})p^{\nu_3+\min\{\nu_1, \nu_2, v_p(\Delta_{12})\}}.$$

Pour tout p premier et $\max\{\nu_1, \nu_2\} < \nu_3$, nous avons

$$\varrho^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \leq 8\varphi(p^{\nu_1+\nu_2+\nu_3})p^{\nu_1+\nu_2}p^{\min\{[v_p(\text{disc}(Q))/2], [\nu_3/2]\}}.$$

Démonstration. — Ces résultats sont essentiellement démontrés dans [7], mais la nécessité de formules uniformes en fonction des formes L_1 , L_2 et Q demande de reprendre toutes les démonstrations.

Le point (1) et la première partie du point (2) sont clairs puisque les formes sont supposées primitives. Le point (3) est établi dans [6].

Nous indiquons les détails de la preuve de la majoration de $\varrho^*(1, 1, p^\nu)$ énoncée au point (2) lorsque p est un facteur impair de $\text{disc}(Q)$. On peut supposer que parmi a_3 et b_3 au moins un des deux est premier à p . Supposons ainsi que $(a_3, p) = 1$. Le changement de variables $y_1 = x_1 + c_3x_2/(2a_3)$ et $y_2 = x_2/2a_3$ permet de montrer que

$$\varrho^*(1, 1, p^\nu) = \#\{(y_1, y_2) \in (\mathbb{Z}/p^\nu\mathbb{Z})^2 : y_1^2 - p^k\delta y_2^2 \equiv 0 \pmod{p^\nu}, p \nmid (y_1, y_2)\},$$

où $\text{disc}(Q) = p^k\delta$ et $(\delta, p) = 1$. Si $\nu \leq k$, ces conditions se transforment en $(p, y_2) = 1$ et $p^{[\nu/2]} \mid y_1$ ce qui fournit

$$\varrho^*(1, 1, p^\nu) = \varphi(p^\nu)p^{[\nu/2]}.$$

Si $\nu > k$, alors $\varrho^*(1, 1, p^\nu) = 0$ si k est impair et si k est pair alors $y_1 = p^{k/2}y'_1$ de sorte que

$$\begin{aligned} \varrho^*(1, 1, p^\nu) &= p^{3k/2} \#\{(y_1, y_2) \in ((\mathbb{Z}/p^{\nu-k}\mathbb{Z})^*)^2 : y_1^2 - \delta y_2^2 \equiv 0 \pmod{p^{\nu-k}}\} \\ &\leq 2\varphi(p^\nu)p^{k/2} = 2\varphi(p^\nu)p^{[k/2]}, \end{aligned}$$

ce qui fournit bien l'inégalité annoncée.

Considérons maintenant le cas de $\varrho^*(1, 1, 2^\nu)$. Lorsque $2^\nu \mid Q(\mathbf{x})$ et $2 \nmid (x_1, x_2)$, au moins une des deux coordonnées x_i est impaire. Appelons x_j l'autre coordonnée. Alors x_j/x_i est solution d'un polynôme de degré 2 modulo 2^n qui a donc au plus 4 solutions modulo 2^n . L'inégalité recherchée en découle.

Pour démontrer le point (4), remarquons que lorsqu'il y a une solution comptée par $\varrho^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3})$ nous avons lorsque $1 \leq i < j \leq 3$

$$p^{\min\{\nu_i, \nu_j\}} \mid \Delta_{ij}(x_1, x_2) = \Delta_{ij},$$

ce qui fournit le résultat annoncé.

Le point (4) permet de restreindre au cas où $\min\{\nu_1, \nu_2\} \leq v_p(\Delta_{12})$, $\min\{\nu_1, \nu_3\} \leq v_p(\Delta_{13})$, $\min\{\nu_2, \nu_3\} \leq v_p(\Delta_{23})$ pour démontrer le point (5). Supposons par exemple que $\nu_1 \geq \max\{\nu_2, \nu_3\}$. Nous avons

$$\varrho^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \leq p^{2\nu_2+2\nu_3} \varrho^*(p^{\nu_1}, 1, 1)$$

d'où le résultat. Le cas $\nu_2 \geq \max\{\nu_1, \nu_3\}$ est identique. Lorsque $\nu_3 > \max\{\nu_1, \nu_2\}$, nous avons

$$\varrho^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \leq p^{2\nu_1+2\nu_2} \varrho^*(1, 1, p^{\nu_3})$$

ce qui fournit le résultat grâce au point (2). \square

De ces informations sur ϱ^* , nous déduisons les propriétés suivantes.

Lemme 3. — Soient L_1, L_2, Q des formes primitives satisfaisant (H2).

1) Alors pour tout p premier et $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ on a

$$\varrho(p^\nu, 1, 1) = \varrho(1, p^\nu, 1) = p^\nu.$$

2) Lorsque $p \nmid 2\text{disc}(Q)$ et $\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, alors on a

$$\varrho(1, 1, p^\nu) = \varphi(p^\nu) \left\{ 1 + \left(\frac{\text{disc}(Q)}{p} \right) \right\}^{\lceil \nu/2 \rceil} + p^{2(\nu - \lceil \nu/2 \rceil)} \leq (\nu + 1)p^\nu,$$

et pour tout facteur p impair de $\text{disc}(Q)$, on a

$$\varrho(1, 1, p^\nu) \ll (\nu + 1)p^{\nu + \min\{[v_p(\text{disc}(Q))/2], \lceil \nu/2 \rceil\}}.$$

Enfin, nous avons

$$\varrho(1, 1, 2^\nu) \ll (\nu + 1)2^\nu.$$

3) Lorsque $\max\{\nu_1, \nu_2\} \leq \lceil \frac{1}{2}\nu_3 \rceil$ et p impair, on a

$$\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \ll (\nu_3 + 1)p^{2(\nu_1 + \nu_2) + \nu_3} p^{\min\{[v_p(\text{disc}(Q))/2], \lceil \nu_3/2 \rceil\}}.$$

De plus lorsque $\max\{\nu_1, \nu_2\} = 1 = \nu_3$ et $p \nmid \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}$, on a

$$\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \ll p^{2(\nu_1 + \nu_2)}.$$

Enfin lorsque $\max\{\nu_1, \nu_2\} \leq \lceil \frac{1}{2}\nu_3 \rceil$

$$\varrho(2^{\nu_1}, 2^{\nu_2}, 2^{\nu_3}) \ll 2^{2\nu_1 + 2\nu_2 + \nu_3}.$$

4) Lorsque $\lceil \frac{1}{2}\nu_3 \rceil \leq \min\{\nu_1, \nu_2\}$ et tout p premier, on a

$$\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \ll p^{\nu_1 + \nu_2 + 2\nu_3 + \min\{\nu_1, \nu_2, v_p(\Delta_{12})\}}.$$

5) Lorsque $\nu_j \leq \lceil \frac{1}{2}\nu_3 \rceil \leq \nu_3 \leq \nu_i$ avec $\{i, j\} = \{1, 2\}$ et tout p premier, on a

$$\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \ll p^{2\nu_j + \nu_i + \nu_3 + \lceil \nu_3/2 \rceil + \min\{\lceil \nu_3/2 \rceil, \lceil v_p(\Delta_{i3})/2 \rceil\}}.$$

Lorsque $\nu_j \leq \lceil \frac{1}{2}\nu_3 \rceil \leq \nu_i < \nu_3$ avec $\{i, j\} = \{1, 2\}$ et tout p premier, on a

$$\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \ll \nu_3 p^{2\nu_j + \nu_i + \nu_3 + \lceil \nu_3/2 \rceil} (p^{\min\{\lceil \nu_3/2 \rceil, \lceil v_p(\Delta_{i3})/2 \rceil\}} + p^{r_p}),$$

avec

$$r_p := \min\{\nu_i - \lceil \nu_3/2 \rceil, \lceil v_p(\Delta_{i3})/2 \rceil\} + \min\{\lceil \nu_3/2 \rceil, \lceil v_p(\text{disc}(Q))/2 \rceil\}.$$

Les constantes implicites dans les majorations du lemme sont indépendantes des coefficients des formes binaires L_1, L_2 et Q .

Démonstration. — Le premier point est trivial puisque les L_i sont primitives.

Pour la deuxième assertion, nous avons

$$\varrho(1, 1, p^\nu) = \sum_{0 \leq k \leq \lceil \nu/2 \rceil} \varrho^*(1, 1, p^{\max\{\nu - 2k, 0\}}) p^{2 \min\{\nu, 2k\} - 2k}.$$

Le cas $p \nmid 2\text{disc}(Q)$ est une conséquence directe du point (2) du Lemme 2. Supposons p un facteur premier impair de $\text{disc}(Q)$. D'après le point (2) du Lemme 2, nous avons

$$\begin{aligned} \varrho^*(1, 1, p^{\max\{\nu - 2k, 0\}}) p^{2 \min\{\nu, 2k\} - 2k} &\leq 2p^\nu (1 - 1/p) p^{\min\{\lceil \nu/2 - k \rceil, \lceil v_p(\text{disc}(Q))/2 \rceil\}} \\ &\leq 2p^\nu (1 - 1/p) p^{\min\{\lceil \nu/2 \rceil, \lceil v_p(\text{disc}(Q))/2 \rceil\}}, \end{aligned}$$

ce qui fournit

$$\varrho(1, 1, p^\nu) \leq (\nu + 2)p^\nu p^{\min\{\lfloor \nu/2 \rfloor, \lfloor v_p(\text{disc}(Q))/2 \rfloor\}}.$$

La dernière inégalité du point (2) se déduit directement de celle qui lui correspond au Lemme 2.

Démontrons le point (3). En ignorant les conditions $p^{\nu_i} \mid L_i(\mathbf{x})$ dans la définition de $\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3})$, nous obtenons

$$\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \leq p^{2(\nu_1 + \nu_2)} \varrho(1, 1, p^{\nu_3})$$

ce qui grâce au (2) permet d'obtenir le résultat recherché pour $\max\{\nu_1, \nu_2\} \leq \lceil \frac{1}{2}\nu_3 \rceil$ et p impair. Lorsque $\max\{\nu_1, \nu_2\} = 1 = \nu_3$ et $p \nmid \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}$, le point (3) et la première inégalité du point (5) du Lemme 2 fournissent

$$\begin{aligned} \varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) &= \varrho^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) + \varrho^*(1, 1, 1)p^{2(\nu_1 + \nu_2)} \\ &= \varrho^*(1, 1, 1)p^{2(\nu_1 + \nu_2)} \ll p^{2(\nu_1 + \nu_2)}. \end{aligned}$$

Le cas $p = 2$ se traite de la même manière.

Démontrons le point (4). Lorsque $\lceil \frac{1}{2}\nu_3 \rceil \leq \min\{\nu_1, \nu_2\}$, puisque

$$\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \leq p^{2\nu_3} \varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, 1)$$

il suffit de supposer $\nu_3 = 0$. Nous nous plaçons de plus dans le cas $\nu_2 \leq \nu_1$. Nous partons de la relation issue du Lemme 2

$$\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, 1) = \sum_{0 \leq k \leq \nu_1} \varrho^*(p^{\nu_1-k}, p^{\max\{\nu_2-k, 0\}}, 1) p^{2\min\{\nu_2, k\}}.$$

La contribution des termes associés à $k \geq \nu_2$ est clairement

$$\leq p^{\nu_1 + 2\nu_2} \sum_{k \geq \nu_2} p^{-k} (1 - 1/p) = p^{\nu_1 + \nu_2}.$$

Lorsque $p \nmid \Delta_{12}$, les autres termes sont nuls. Lorsque $p \mid \Delta_{12}$ la contribution des termes associés à $k < \nu_2$ est

$$\sum_{\max\{0, \nu_2 - v_p(\Delta_{12})\} \leq k < \nu_2} \varrho^*(p^{\nu_1-k}, p^{\nu_2-k}, 1) p^{2k} \ll p^{\nu_1 + \nu_2 + \min\{\nu_2, v_p(\Delta_{12})\}},$$

ce qui prouve le point (4).

Pour établir le point (5), nous nous plaçons dans le cas $\nu_2 \leq \lceil \frac{1}{2}\nu_3 \rceil \leq \nu_1$ et remarquons

$$\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \leq p^{2\nu_2} \varrho(p^{\nu_1}, 1, p^{\nu_3}).$$

Dans la somme

$$\varrho(p^{\nu_1}, 1, p^{\nu_3}) = \sum_{0 \leq k \leq \nu_1} \varrho^*(p^{\nu_1-k}, 1, p^{\max\{\nu_3-2k, 0\}}) p^{2\min\{\nu_3, 2k\}},$$

la contribution des $k \geq \lceil \frac{1}{2}\nu_3 \rceil$ est

$$\leq \sum_{k \geq \lceil \nu_3/2 \rceil} p^{\nu_1 + 2\nu_3 - k} (1 - 1/p) = p^{\nu_1 + \nu_3 + \lceil \nu_3/2 \rceil}.$$

Les autres termes de la somme sont nuls si $p \nmid \Delta_{13}$ ou si $p \mid \Delta_{13}$ et $\min\{\nu_1 - k, \nu_3 - 2k\} > v_p(\Delta_{13})$. Nous nous plaçons donc dans le cas $p \mid \Delta_{13}$ et sommes sur les k tels que $\min\{\nu_1 - k, \nu_3 - 2k\} \leq v_p(\Delta_{13})$

Lorsque $p \mid \Delta_{13}$ et $\nu_1 \geq \nu_3$ (ie $\nu_3 - 2k \leq \nu_1 - k$ pour tout $k \geq 0$), la contribution des $k < \lceil \frac{1}{2}\nu_3 \rceil$ est

$$\sum_{0 \leq k < \lceil \nu_3/2 \rceil} \varrho^*(p^{\nu_1-k}, 1, p^{\nu_3-2k}) p^{4k} \ll \sum_{\max\{0, (\nu_3 - v_p(\Delta_{13}))/2\} \leq k < \lceil \nu_3/2 \rceil} p^{\nu_1+2\nu_3-k} \\ \ll p^{\nu_1+\nu_3+\lceil \nu_3/2 \rceil + \min\{\lceil \nu_3/2 \rceil, \lceil v_p(\Delta_{13})/2 \rceil\}}.$$

Lorsque $p \mid \Delta_{13}$ et $\nu_1 < \nu_3$ (ie $\nu_3 - 2k \geq \nu_1 - k$ seulement pour tout $0 \leq k \leq \nu_3 - \nu_1$), la contribution des $k < \lceil \frac{1}{2}\nu_3 \rceil$ est

$$\sum_{0 \leq k < \lceil \nu_3/2 \rceil} \varrho^*(p^{\nu_1-k}, 1, p^{\nu_3-2k}) p^{4k} \\ \ll \sum_{\max\{\nu_3 - \nu_1, (\nu_3 - v_p(\Delta_{13}))/2\} \leq k < \lceil \nu_3/2 \rceil} p^{\nu_1+2\nu_3-k} \\ + \sum_{\max\{0, \nu_1 - v_p(\Delta_{13})\} \leq k < \nu_3 - \nu_1} p^{2\nu_1+\nu_3+\min\{\lceil v_p(\text{disc}(Q))/2 \rceil, \lceil \nu_3/2 \rceil\}} \\ \ll p^{\nu_1+\nu_3+\lceil \nu_3/2 \rceil + \min\{\lceil \nu_3/2 \rceil, \lceil v_p(\Delta_{13})/2 \rceil\}} \\ + \nu_3 p^{\nu_1+\nu_3+\lceil \nu_3/2 \rceil + \min\{\nu_1 - \lceil \nu_3/2 \rceil, \lceil v_p(\Delta_{13})/2 \rceil\} + \min\{\lceil \nu_3/2 \rceil, \lceil v_p(\text{disc}(Q))/2 \rceil\}},$$

puisque $\nu_1 \leq \lceil \nu_3/2 \rceil + \lceil v_p(\Delta_{13})/2 \rceil$ est une condition nécessaire pour que la deuxième somme ne soit pas nulle. Cela clôt la démonstration. \square

Ce qu'il faut retenir de ce lemme est que la fonction

$$f(\mathbf{d}) := \frac{\varrho(\mathbf{d})}{d_1 d_2 d_3}$$

ressemble à la fonction $r : \mathbf{d} \mapsto r(\mathbf{d}) = r_{\text{disc}(Q)}(d_3)$, où

$$r_{\text{disc}(Q)}(d) := \sum_{k \mid d} \chi_{\text{disc}(Q)}(k)$$

et $\chi_{\text{disc}(Q)}(n) := (\frac{\text{disc}(Q)}{n})$ est le symbole de Kronecker. Nous notons h la fonction satisfaisant les relations

$$f(\mathbf{d}) = (h * r)(\mathbf{d}) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^3 \\ k_j \mid d_j}} h\left(\frac{d_1}{k_1}, \frac{d_2}{k_2}, \frac{d_3}{k_3}\right) r(\mathbf{k}).$$

Le résultat dont nous aurons besoin est le suivant.

Lemme 4. — Soit $\varepsilon > 0$. Lorsque L_1, L_2, Q sont des formes satisfaisant (H2), nous avons

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^3} \frac{|h(\mathbf{k})| \log(k_1 k_2 k_3)}{k_1 k_2 k_3} \ll L_\infty^\varepsilon.$$

En particulier lorsque σ_p est défini par (2.5), on a

$$\prod_p \sigma_p = L(1, \chi_{\text{disc}(Q)}) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^3} \frac{h(\mathbf{k})}{k_1 k_2 k_3} \ll L_\infty^\varepsilon.$$

Démonstration. — La fonction h est multiplicative puisque ϱ et r le sont. Notant $P = P(L_1, L_2, Q)$ la somme à majorer, nous avons donc $P \leq P'/\log 2$ avec

$$P' = P'(L_1, L_2, Q) := \prod_p \left(1 + \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \frac{|h(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3})| \log(p^{\nu_1+\nu_2+\nu_3})}{p^{\nu_1+\nu_2+\nu_3}} \right). \quad (3.1)$$

Nous commençons par montrer que nous pouvons nous restreindre au cas de formes primitives. Soit $P'_p = P'_p(L_1, L_2, Q)$ le facteur relatif à un nombre premier du produit (3.1). Lorsque $p \nmid \ell_1 \ell_2 q$, le Lemme 1 permet d'écrire

$$\varrho(p^{n_1}, p^{n_2}, p^{n_3}; L_1, L_2, Q) = \varrho(p^{n_1}, p^{n_2}, p^{n_3}; L_1^*, L_2^*, Q^*)$$

et ainsi

$$\begin{aligned} P'(L_1, L_2, Q) &= \prod_{p \nmid \ell_1 \ell_2 q} P'_p(L_1^*, L_2^*, Q^*) \prod_{p \mid \ell_1 \ell_2 q} P'_p(L_1, L_2, Q) \\ &= P'(L_1^*, L_2^*, Q^*) \prod_{p \mid \ell_1 \ell_2 q} \frac{P'_p(L_1, L_2, Q)}{P'_p(L_1^*, L_2^*, Q^*)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

L'inverse $r^{(-1)}$ de la fonction r au sens de la convolution est donnée par

$$r^{(-1)}(d_1, d_2, d_3) = \mu(d_1)\mu(d_2)\vartheta(d_3).$$

avec ϑ la fonction multiplicative défini par

$$\vartheta(p^n) := \begin{cases} \mu(p^n)(1 + \chi_{\text{disc}(Q)}(p^n)), & \text{si } n = 1 \text{ ou } n \neq 3, \\ \chi_{\text{disc}(Q)}(p), & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

L'inégalité $|r^{(-1)}(d_1, d_2, d_3)| \leq r(d_1, d_2, d_3)$ fournit

$$|h(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3})| = |(f * r^{(-1)})(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3})| \leq (f * r)(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}). \quad (3.3)$$

De (3.3), nous obtenons l'inégalité

$$P'_p \leq c_p \left(1 + \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \frac{r(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \log(p^{\nu_1+\nu_2+\nu_3})}{p^{\nu_1+\nu_2+\nu_3}} \right) P''_p \quad (3.4)$$

avec $c_2 = 1/\log 2$ et $c_p = 1$ si $p > 2$ et

$$P''_p = P''_p(L_1, L_2, Q) := 1 + \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \frac{\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \log(p^{\nu_1+\nu_2+\nu_3})}{p^{2(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}}.$$

Il est clair que

$$\prod_{p \mid \ell_1 \ell_2 q} \left(1 + \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \frac{r(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \log(p^{\nu_1+\nu_2+\nu_3})}{p^{\nu_1+\nu_2+\nu_3}} \right) \ll L_{\infty}^{\varepsilon}.$$

D'après le Lemme 1, on a

$$\frac{\varrho(p^{\nu_1+v_p(\ell_1)}, p^{\nu_2+v_p(\ell_2)}, p^{\nu_3+v_p(q)})}{p^{2(\nu_1+\nu_2+\nu_3+v_p(\ell_1)+v_p(\ell_2)+v_p(q))}} = \frac{\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}; L_1^*, L_2^*, Q^*)}{p^{2(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}}.$$

Il vient

$$\frac{\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}; L_1, L_2, Q)}{p^{2(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}} \leq \frac{\varrho(p^{\nu'_1}, p^{\nu'_2}, p^{\nu'_3}; L_1^*, L_2^*, Q^*)}{p^{2(\nu'_1+\nu'_2+\nu'_3)}}.$$

avec

$$\nu'_i := \max\{\nu_i - v_p(\ell_i), 0\}, \quad \nu'_3 := \max\{\nu_3 - v_p(q), 0\},$$

pour $i = 1, 2$. Lorsque les ν'_j sont fixés, les nombres de triplets ν satisfaisant cela est au plus $(v_p(\ell_1) + 1)(v_p(\ell_2) + 1)(v_p(q) + 1)$, et pour ces triplets comptés nous avons lorsque $\nu'_1 + \nu'_2 + \nu'_3 \geq 1$

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \leq (\nu'_1 + \nu'_2 + \nu'_3)(v_p(\ell_1) + 1)(v_p(\ell_2) + 1)(v_p(q) + 1).$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} P_p'' &\leq c_p((v_p(\ell_1) + 1)(v_p(\ell_2) + 1)(v_p(q) + 1))^2 \log p \\ &\quad \times \left(1 + \sum_{\nu' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \frac{\varrho(p^{\nu'_1}, p^{\nu'_2}, p^{\nu'_3}; L_1^*, L_2^*, Q^*) \log(p^{\nu'_1 + \nu'_2 + \nu'_3})}{p^{2(\nu'_1 + \nu'_2 + \nu'_3)}}\right) \\ &\leq c_p^2((v_p(\ell_1) + 1)(v_p(\ell_2) + 1)(v_p(q) + 1))^2 (\log p) P'_p(L_1^*, L_2^*, Q^*) \\ &\quad \times \left(1 + \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \frac{r(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \log(p^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3})}{p^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}}\right), \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir via (3.2) et (3.4) $P'(L_1, L_2, Q) \ll L_\infty^\varepsilon P'(L_1^*, L_2^*, Q^*)$.

Nous supposons maintenant que les formes L_1, L_2, Q sont primitives et majorons P' . Nous avons lorsque $\nu \in \mathbb{N}$ les relations $h(p^\nu, 1, 1) = h(1, p^\nu, 1) = 0$ issues du Lemme 3(1), et lorsque de plus $p \nmid 2\text{disc}(Q)$

$$h(1, 1, p) = -\frac{1}{p} \chi_{\text{disc}(Q)}(p), \quad h(1, 1, p^\nu) \ll \nu + 1,$$

issu du Lemme 3(2) et du calcul de $r^{(-1)}(1, 1, p^k)$. Ainsi la contribution dans la somme P'_p des exposants ν tels que $\#\{i : \nu_i \geq 1\} \leq 1$ est lorsque $p \nmid 2\text{disc}(Q)$ égale à $O(\log p/p^2)$. Du Lemme 3 et de (3.3), nous déduisons la majoration

$$\begin{aligned} |h(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3})| &\leq 2 \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 \\ n_j \leq \nu_j}} f(p^{n_1}, p^{n_2}, p^{n_3}) \\ &\leq 2 \prod_{i=1}^3 (\nu_i + 1) \max_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 \\ n_j \leq \nu_j}} f(p^{n_1}, p^{n_2}, p^{n_3}) \\ &\ll \prod_{i=1}^3 (\nu_i + 1)^2 p^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + k_p - \max\{\nu_1 + \nu_2, \nu_1 + \lceil \nu_3/2 \rceil, \nu_2 + \lceil \nu_3/2 \rceil, \nu_3\}}, \end{aligned}$$

où $k_p = \lfloor v_p(\text{disc}(Q))/2 \rfloor + v_p(\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23})$. Nous avons utilisé pour la première majoration l'inégalité $|r^{-1}(p^{k_1}, p^{k_2}, p^{k_3})| \leq 2$. Lorsque $\max\{\nu_1, \nu_2\} = 1 = \nu_3$ et $p \nmid 2\text{disc}(Q)\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}$, on utilisera

$$|h(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3})| \ll p^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 - 2}.$$

Cela permet de majorer la contribution des ν tels que $\#\{i : \nu_i \geq 1\} \geq 2$. Nous avons ainsi

$$\prod_{p \nmid 2\text{disc}(Q)\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}} P'_p \ll 1.$$

Il est clair que

$$\prod_{p \mid 2\text{disc}(Q)\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}} \left(1 + \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \frac{r(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \log(p^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3})}{p^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}}\right) \ll L_\infty^\varepsilon.$$

Compte tenu de (3.4), il reste à montrer

$$\prod_{p|2\text{disc}(Q)\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}} P_p'' \ll L_\infty^\varepsilon. \quad (3.5)$$

La contribution à la somme P_p'' aux indices satisfaisant $\max\{\nu_1, \nu_2\} \leq \lceil \frac{1}{2}\nu_3 \rceil$ est d'après le point (3) du Lemme 3

$$\ll \log p \sum_{\nu_3 \geq 1} (\nu_3 + 1)^2 p^{\min\{[v_p(\text{disc}(Q))/2], [\nu_3/2]\} - \nu_3} \ll \frac{\log p}{p}.$$

La contribution à la somme P_p'' aux indices satisfaisant $\max\{\lceil \frac{1}{2}\nu_3 \rceil, 1\} \leq \nu_2 \leq \nu_1$ est d'après le point (4) du Lemme 3

$$\begin{aligned} &\ll \log p \sum_{1 \leq \nu_2 \leq \nu_1} (\nu_1 + 1) p^{\min\{\nu_2, v_p(\Delta_{12})\} - \nu_1 - \nu_2} \\ &\ll \log p \sum_{\nu_2 \geq 1} (\nu_2 + 1) p^{\min\{\nu_2, v_p(\Delta_{12})\} - 2\nu_2} \ll \frac{\log p}{p}. \end{aligned}$$

De même lorsqu'on intervertit les indices 1 et 2. Enfin les cas $\max\{\nu_j, 1\} \leq \lceil \frac{1}{2}\nu_3 \rceil \leq \nu_i$ se majore de la même manière à partir du point (5) du Lemme 3. Enfin le cas où deux des ν_j sont nuls s'appuie sur les points (1) et (2) du Lemme 3. Ainsi, nous obtenons $P_p'' = 1 + O(\log p/p)$. Cela permet de montrer (3.5). \square

4. Interprétation de la constante

4.1. Densité p -adique. — Lorsque $A \in \mathbb{Z}$ où $\alpha = v_p(A)$, $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ et $n \in \mathbb{N}$, nous considérons

$$S_\lambda(A; p^n) := \#\{(x, y) \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2 : p^\lambda xy \equiv A \pmod{p^n}\}.$$

Si $\alpha \leq n$, il est facile de montrer

$$S_\lambda(A; p^n) = \begin{cases} p^{2n}, & \text{si } \lambda \geq n, \\ p^{n+\lambda}(1 - 1/p)(1 + \alpha - \lambda), & \text{si } \lambda < n. \end{cases}$$

Posant

$$M_\nu(p^n) := \#\{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2 : v_p(L_i(\mathbf{x})) = \nu_i, v_p(Q(\mathbf{x})) = \nu_3\},$$

$$M'_\nu(p^n) := \#\{\mathbf{x} \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^2 : v_p(L_i(\mathbf{x})) \geq \nu_i, v_p(Q(\mathbf{x})) \geq \nu_3\},$$

on a lorsque $n \geq \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$

$$M'_\nu(p^n) = p^{2n-2\nu_1-2\nu_2-2\nu_3} \varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3})$$

$$M_\nu(p^n) = \sum_{\mathbf{e} \in \{0,1\}^3} (-1)^{e_1+e_2+e_3} M'_{\nu+\mathbf{e}}(p^n).$$

Posant $m_j = \max\{\lambda_j, \mu_j\}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} N_{\lambda, \mu}(p^n) &= p^{3n+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} (1 - 1/p)^3 \sum_{m_j \leq \nu_j < n} M_\nu(p^n) \prod_{1 \leq j \leq 3} (1 + \nu_j - \lambda_j) \\ &\quad + O(n^3 p^{4n}). \end{aligned}$$

Faisant le changement de variables $n_j = \nu_j + e_j - \lambda_j$ et notant que $\nu_j + e_j \geq m_j + e_j \geq m_j$, nous en déduisons

$$\begin{aligned} \sigma_{\lambda, \mu}(p) &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\substack{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 \\ n_j \geq m_j - \lambda_j}} \frac{\varrho(p^{\lambda_1+n_1}, p^{\lambda_2+n_2}, p^{\lambda_3+n_3})}{p^{2(\lambda_1+n_1+\lambda_2+n_2+\lambda_3+n_3)}} \\ &\quad \times \sum_{0 \leq e_j \leq \min\{1, \lambda_j + n_j - m_j\}} (-1)^{e_1+e_2+e_3} \prod_{1 \leq j \leq 3} (1 + n_j - e_j). \end{aligned}$$

Or nous avons

$$\sum_{0 \leq e \leq \min\{1, \lambda + n - m\}} (-1)^e (1 + n - e) = \begin{cases} 1, & \text{si } \lambda + n - m \geq 1, \\ 1 + m - \lambda, & \text{si } \lambda + n - m = 0, \end{cases}$$

ce qui fournit donc

$$\begin{aligned} \sigma_{\lambda, \mu}(p) &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \frac{\varrho(p^{\max\{m_1, \lambda_1+n_1\}}, \dots, p^{\max\{m_3, \lambda_3+n_3\}})}{p^{2(\max\{m_1, \lambda_1+n_1\} + \dots + \max\{m_3, \lambda_3+n_3\})}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \frac{\varrho(p^{\max\{\mu_1, \lambda_1+n_1\}}, \dots, p^{\max\{\mu_3, \lambda_3+n_3\}})}{p^{2(\max\{\mu_1, \lambda_1+n_1\} + \dots + \max\{\mu_3, \lambda_3+n_3\})}}, \end{aligned}$$

et qui permet ainsi d'obtenir la densité p -adique introduite en (2.6).

4.2. Densité archimédienne. — La variété définie en (2.14) est le lieu des zéros des polynômes $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{t})$ définis par

$$f_i(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) = L_i(\mathbf{x})/d_i - s_i t_i, \quad f_3(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) = Q(\mathbf{x})/d_3 - s_3 t_3.$$

On calcule le déterminant suivant

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_3}{\partial s_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \frac{\partial f_3}{\partial s_2} \\ \frac{\partial f_1}{\partial s_3} & \frac{\partial f_2}{\partial s_3} & \frac{\partial f_3}{\partial s_3} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -t_1 & 0 & 0 \\ 0 & -t_2 & 0 \\ 0 & 0 & -t_3 \end{pmatrix} = -t_1 t_2 t_3.$$

Les variables t_i et s_i appartiennent à $[1, +\infty)$. Maintenant, nous pouvons définir

$$\omega_\infty(\mathcal{R}, V) := \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{X^2 (\log r' X)^3} \iint_{\mathbf{x} \in X\mathcal{R}} \iiint_{\mathbf{t} \in T} \frac{dt_1 dt_2 dt_3}{t_1 t_2 t_3} dx_1 dx_2, \quad (4.1)$$

où

$$T := \left\{ \mathbf{t} : 1 \leq t_i \leq L_i(\mathbf{x}), 1 \leq t_3 \leq Q(\mathbf{x}), \left(\frac{\log t_1}{\log r' X}, \frac{\log t_2}{\log r' X}, \frac{\log t_3}{2 \log r' X} \right) \in V \right\}.$$

Lorsque X tend vers l'infini, on a

$$\begin{aligned} V(X) &:= \iint_{\mathbf{x} \in X\mathcal{R}} \iiint_{\mathbf{t} \in T} \frac{dt_1 dt_2 dt_3}{t_1 t_2 t_3} dx_1 dx_2 \\ &= \iint_{\mathbf{x} \in X\mathcal{R}'(X)} \iiint_{\mathbf{u} \in V'} 2(\log r' X)^3 du_1 du_2 du_3 dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

où $\mathcal{R}'(X) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{R} : L_i(\mathbf{x}) \geq 1/X, Q(\mathbf{x}) \geq 1/X^2\}$ et $V' := \{\mathbf{u} \in V : u_i \leq \log L_i(\mathbf{x})/(\log r'X), u_3 \leq \log Q(\mathbf{x})/(2 \log r'X)\}$. Un changement de variable homothétique fournit alors

$$\begin{aligned} V(X) &= X^2 \iint_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}'(X)} \log(XL_1(\mathbf{x})) \log(XL_2(\mathbf{x})) \log(X^2Q(\mathbf{x})) dx_1 dx_2 \\ &= 2X^2(\log X)^3 \text{vol}(\mathcal{R}'(X)) \text{vol}(V) + O(X^2(\log X)^2 I(X)) \end{aligned}$$

avec

$$I(X) = \iint_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}'(X)} (1 + |\log L_1(\mathbf{x})| + |\log L_2(\mathbf{x})| + |\log Q(\mathbf{x})|) dx_1 dx_2.$$

Il est clair que $\text{vol}(\mathcal{R}'(X)) = \text{vol}(\mathcal{R}) + o(1)$ et l'intégrale $I(X)$ est bornée. Cela fournit bien $\omega_\infty(\mathcal{R}, V) = 2 \text{vol}(\mathcal{R}) \text{vol}(V)$.

5. Démonstration du Théorème 2

Avant de commencer la démonstration, nous notons que le Corollaire 1 de [1] fournit la majoration

$$S(X) \ll L_\infty^\varepsilon r_\infty^2 X^2 (\log X)^3. \quad (5.1)$$

Nous serons amenés à utiliser les majorations

$$r'/(2L_\infty) \leq r_\infty \leq 2r'L_\infty, \quad \text{vol}(\mathcal{R}) \leq 4r_\infty^2. \quad (5.2)$$

La majoration $r' \leq 2r_\infty L_\infty$ est évidente ; la majoration de r_∞ provient des relations

$$x_1 = \frac{b_2 L_1(\mathbf{x}) - b_1 L_2(\mathbf{x})}{b_2 a_1 - b_1 a_2}, \quad x_2 = \frac{a_2 L_1(\mathbf{x}) - a_1 L_2(\mathbf{x})}{b_1 a_2 - b_2 a_1},$$

où nous avons utilisé la notation (1.2). Notre démonstration reprend les idées développées dans [5] et [2]. La première étape est un cas particulier d'un résultat dû à Marasingha [7] concernant le niveau de répartition que nous énonçons de la manière suivante.

Lemme 5. — Soit $\varepsilon > 0$. Lorsque L_1, L_2, Q, \mathcal{R} satisfont (H1)–(H3), $X \geq 1$, $V_1, V_2, V_3 \geq 2$ et $V = V_1 V_2 V_3$, il existe une constante absolue $A > 0$ telle que

$$\sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^3 \\ d_i \leq V_i}} \left| \#(\Lambda(\mathbf{d}) \cap X\mathcal{R}_{\mathbf{d}}) - \text{vol}(\mathcal{R}_{\mathbf{d}}) X^2 \frac{\varrho(\mathbf{d})}{(d_1 d_2 d_3)^2} \right| \ll L_\infty^\varepsilon (r_\infty X \sqrt{V} + V) (\log V)^A,$$

où $\mathcal{R}_{\mathbf{d}} \subseteq \mathcal{R}$ désigne une région convexe dépendante de \mathbf{d} .

Démonstration. — Dans [7], la dépendance par rapport aux formes L_1, L_2 et Q n'est pas indiquée, mais il est aisé de l'obtenir. De même, nous avons ajouté la possibilité d'avoir une région de comptage pouvant dépendre de \mathbf{d} ce qui ne modifie pas la preuve. Nous ne donnons pas plus de détails.

Nous nous contentons d'indiquer comment on peut étendre ce résultat à des formes non primitives. Fixant d' et ℓ , le nombre de d tel que $d' = d/(d, \ell)$ est inférieur à $\tau(\ell)$. Nous avons $\Lambda(\mathbf{d}; L_1, L_2, Q) = \Lambda(\mathbf{d}'; L_1^*, L_2^*, Q^*)$. Ainsi, d'après le Lemme 1, le terme à majorer est borné par

$$\tau(\ell_1) \tau(\ell_2) \tau(q) \sum_{\substack{\mathbf{d}' \in \mathbb{N}^3 \\ d'_i \leq V_i}} \left| \#(\Lambda(\mathbf{d}'; L_1^*, L_2^*, Q^*) \cap X\mathcal{R}_{\mathbf{d}'}) - \text{vol}(\mathcal{R}_{\mathbf{d}'}) X^2 \frac{\varrho(\mathbf{d}'; L_1^*, L_2^*, Q^*)}{(d'_1 d'_2 d'_3)^2} \right|$$

La majoration du Lemme 5 dans le cas de formes primitives permet de conclure. \square

Posons $X' = r'X$ et $Y = (r'X)^{1/2}/(\log X)^C$ où C est une constante que nous préciserons à la fin. Avec les notations (1.2), un des deux coefficients a_1 ou a_2 est non nul puisque les L_i ne sont pas proportionnelles. Supposons $a_1 \neq 0$, le cas $a_1 = 0$ et $a_2 \neq 0$ se traitant de la même manière.

Nous majorons les sommes $S_0(X)$ et $S'_0(X)$ définies par

$$S_0(X) := \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap X\mathcal{R}} \tau(L_2(\mathbf{x}))\tau(Q(\mathbf{x})) \sum_{\substack{d_1 | L_1(\mathbf{x}) \\ Y < d_1 < 2L_\infty X'/Y}} 1,$$

$$S'_0(X) := \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap X\mathcal{R} \\ L_1(\mathbf{x}) \leq Y^2}} \tau(L_2(\mathbf{x}))\tau(Q(\mathbf{x}))\tau(L_1(\mathbf{x})).$$

Lemme 6. — *Avec les hypothèses du Théorème 2, on a*

$$S_0(X) \ll L_\infty^\varepsilon r_\infty r' X^2 (\log X)^2 \log \log X, \quad S'_0(X) \ll L_\infty^\varepsilon r_\infty r' X^2 (\log X)^{3-2C}.$$

Démonstration. — Soit τ' la fonction multiplicative définie par

$$\tau'(p^\nu) = \begin{cases} 2, & \text{si } \nu = 1, \\ (\nu + 1)^2, & \text{si } \nu \geq 2. \end{cases}$$

Ainsi nous avons pour tout $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ les inégalités $\tau(n_1)\tau(n_2) \leq \tau'(n_1 n_2)$ et $\tau'(n_1) \leq \tau(n_1)^2$. Avec cette notation, nous écrivons

$$S_0(X) \leq \sum_{d_1 \in [Y', 2L_\infty X'/Y]} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap X\mathcal{R} \\ d_1 | L_1(\mathbf{x})}} \tau'(L_2(\mathbf{x})Q(\mathbf{x})).$$

Rappelant l'hypothèse $a_1 \neq 0$, nous faisons le changement de variables $d_1 u_1 = L_1(\mathbf{x})$ et $u_2 = x_2$. Nous avons $a_1^3(L_2 Q)(\mathbf{x}) = (L_2 Q)(d_1 u_1 - b_1 u_2, u_2) = F_{d_1}(u_1, u_2)$, où

$$F_{d_1}(u_1, u_2) = (a_2 d_1 u_1 + \Delta_{12} u_2)(a_3 d_1^2 u_1^2 + d_1(a_1 c_3 - 2a_3 b_1)u_1 u_2 + \Delta_{13} u_2^2),$$

avec Δ_{12} et Δ_{13} définis en (2.11). Ainsi,

$$S_0(X) \leq \sum_{d_1 \in [Y', 2L_\infty X'/Y]} \sum_{\substack{(u_1, u_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ u_1 \leq r'X/d_1 \\ u_2 \leq r_\infty X}} \tau'(F_{d_1}(u_1, u_2)).$$

La forme $F_{d_1}(u_1, u_2)$ a des coefficients dont le pgcd divise $\Delta_{12}\Delta_{13}$. Le Lemme 1 de [1] permet d'affirmer que le discriminant de $F_{d_1}(u_1, u_2)$ est égal à $d_1^6 c$ où c est un entier qui s'écrit comme un polynôme des coefficients des formes L_1 , L_2 et Q . Le Théorème 1 de [1] fournit alors

$$S_0(X) \ll L_\infty^\varepsilon \sum_{d_1 \in [Y', 2L_\infty X'/Y]} \phi^*(d_1) \frac{r' r_\infty X^2 (\log r' X)^2}{d_1}$$

où $\phi^*(m) = \prod_{p|m} (1 + 1/p)$. Cela permet d'obtenir la majoration de $S_0(X)$ annoncée puisque

$$\log r' X \ll \log X$$

sous la condition $r' X^{1-\varepsilon} \geq 1$.

Il est clair que la majoration

$$S'_0(X) \leq \sum_{d_1 \leq X'} \sum_{\substack{(u_1, u_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ u_1 \leq Y^2/d_1 \\ u_2 \leq r_\infty X}} \tau'(F_{d_1}(u_1, u_2)).$$

permet de la même manière d'obtenir la majoration de $S'_0(X)$ annoncée. \square

Nous imposons $2C \geq 1$. Dans la suite, nous noterons implicitement

$$\delta := \left(\frac{\log d_1}{\log X'}, \frac{\log d_2}{\log X'}, \frac{\log d_3}{2 \log X'} \right).$$

Le Lemme 6 permet de se restreindre au cas $L_i(\mathbf{x}) > Y^2$, puis $d_1 \leq Y$ et $d_2 \leq X'^{1/2}$. En effet, si $d_1 \geq \sqrt{L_1(\mathbf{x})}$, alors $L_1(\mathbf{x})/d_1$ est un diviseur de $L_1(\mathbf{x})$ inférieur à $\sqrt{L_1(\mathbf{x})}$. Ensuite, la majoration de la somme $S_0(X)$ permet de majorer la contribution des \mathbf{d} tels que $Y < d_1 \leq \sqrt{L_1(\mathbf{x})} \leq 2L_\infty X'/Y$. De plus puisque $|\log L_i(\mathbf{x}) - \log X'| \leq \log(2L_\infty) + \log(X'/Y^2)$ changer d_1 en $L_1(\mathbf{x})/d_1$ revient à changer $\delta_1 = \log d_1 / \log X'$ en $1 - \delta_1$. Nous faisons le même raisonnement pour imposer $d_2 \leq X'^{1/2}$. Cela justifie ainsi la restriction $V \subseteq [0, \frac{1}{2}]^2 \times [0, 1]$.

Nous obtenons

$$S(X; V) = S_1(X) + S_2(X) + O(L_\infty^\varepsilon r_\infty r' X^2 (\log X)^2 \log \log X),$$

avec

$$\begin{aligned} S_1(X) &:= \sum_{d_1 \leq Y} \sum_{d_2 \leq X'^{1/2}} \sum_{\substack{d_3 \leq X' \\ \delta \in V}} \#(\Lambda(\mathbf{d}) \cap X\mathcal{R}), \\ S_2(X) &:= \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap X\mathcal{R}} \sum_{\substack{d_1 | L_1(\mathbf{x}) \\ d_1 \leq Y}} \sum_{\substack{d_2 | L_2(\mathbf{x}) \\ d_2 \leq X'^{1/2}}} \sum_{\substack{d_3 | Q(\mathbf{x}) \\ d_3 < |Q(\mathbf{x})|/X' \\ (\delta_1, \delta_2, Q(\mathbf{x})/(2 \log X') - \delta_3) \in V}} 1. \end{aligned}$$

Nous estimons $S_1(X)$ grâce au Lemme 5. Il vient

$$\begin{aligned} S_1(X) &= \text{vol}(\mathcal{R}) X^2 \sum_{d_1 \leq Y} \sum_{d_2 \leq X'^{1/2}} \sum_{\substack{d_3 \leq X' \\ \delta \in V}} \frac{\varrho(\mathbf{d})}{(d_1 d_2 d_3)^2} \\ &\quad + O\left(L_\infty^\varepsilon X^2 \left(\frac{r_\infty r'}{(\log X)^{C/2-A}} + \frac{r'^2}{(\log X)^{C-A}} \right)\right) \end{aligned}$$

La conjonction (5.1) et (5.2) permet de montrer que le terme d'erreur de (2.4) est $O(L_\infty^\varepsilon r_\infty^2 X^2 (\log X)^3)$. En prenant $C \geq 2$, nous pouvons donc supposer que $r' \ll r_\infty (\log X)^{C/2}$. En choisissant $C \geq 2A$, nous obtenons

$$S_1(X) = \text{vol}(\mathcal{R}) X^2 M(X; V) + O(L_\infty^\varepsilon r_\infty r' X^2 (\log X)^2 \log \log X),$$

avec

$$M(X; V) := \sum_{d_1 \leq Y} \sum_{d_2 \leq X'^{1/2}} \sum_{\substack{d_3 \leq X' \\ \delta \in V}} \frac{\varrho(\mathbf{d})}{(d_1 d_2 d_3)^2}. \quad (5.3)$$

Nous estimons $S_2(X)$ grâce au Lemme 5 appliqué à la région

$$\mathcal{R}(r' d_3 / X) := \{\mathbf{x} \in \mathcal{R} : |Q(\mathbf{x})| > r' d_3 / X\}.$$

Nous pourrions nous restreindre aussi à l'ensemble $\mathbf{x} \in X\mathcal{R}(r'^2/(\log X)^2)$ de sorte que nous puissions remplacer la condition $(\delta_1, \delta_2, Q(\mathbf{x})/(2 \log X') - \delta_3) \in V$ par $(\delta_1, \delta_2, 1 - \delta_3) \in V$.

Montrons la majoration

$$\text{vol}(\mathcal{R} \setminus \mathcal{R}(\alpha)) \leq r_\infty \sqrt{\alpha}, \quad (5.4)$$

avec $\alpha := r'd_3/X$. Nous avons $a_3b_3 \neq 0$ avec la notation (1.2). Nous pouvons supposer sans perte de généralité $a_3 > 0$ et donc $a_3 \geq 1$. Nous faisons le changement de variable $x'_1 = x_1 + c_3x_2/2a_3$, $x'_2 = x_2$. Lorsque $\mathbf{x} \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}(\alpha)$, les nouvelles variables vérifient

$$-\alpha \leq a_3x_1'^2 - b_3x_2'^2 \leq \alpha$$

avec $b'_3 := -(4b_3a_3 - c_3^2)/4a_3$. Lorsque $b'_3x_2'^2 \leq \alpha$, on a $|x'_1| \leq \sqrt{2\alpha}$ et $|x'_2| \leq r_\infty$ ce qui fournit une contribution à (5.4) inférieure à $2r_\infty\sqrt{2\alpha}$. Lorsque $b'_3x_2'^2 > \alpha$, on a $\sqrt{a_3}|x'_1| \in [v^-, v^+]$ avec

$$v^- := \sqrt{b'_3x_2'^2 - \alpha}, \quad v^+ := \sqrt{b'_3x_2'^2 + \alpha}$$

On a

$$v^+ - v^- = \frac{v^{+2} - v^{-2}}{v^+ + v^-} \leq \sqrt{2\alpha},$$

ce qui fournit une contribution à (5.4) encore inférieure à $2r_\infty\sqrt{2\alpha}$. Cela clôt la preuve de (5.4).

En se restreignant encore à $r' \ll r_\infty(\log X)^{C/2}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} S_2(X) &= X^2 \sum_{d_1 \leq Y} \sum_{d_2 \leq X'^{1/2}} \sum_{\substack{d_3 \leq X' \\ (\delta_1, \delta_2, 1-\delta_3) \in V}} \frac{\varrho(\mathbf{d}) \text{vol}(\mathcal{R}(r'd_3/X))}{(d_1d_2d_3)^2} \\ &\quad + O\left(L_\infty^\varepsilon X^2 \left(\frac{r_\infty r'}{(\log X)^{C/2-A}} + \frac{r'^2}{(\log X)^{C-A}} + r_\infty r' (\log X)^2 \right)\right) \\ &= \text{vol}(\mathcal{R}) X^2 M(X; V') + O(r_\infty r' X^2 (R(X) + L_\infty^\varepsilon (\log X)^2 \log \log X)), \end{aligned}$$

avec

$$R(X) = \sum_{d_1 \leq X'^{1/2}} \sum_{d_2 \leq X'^{1/2}} \sum_{d_3 \leq X'} \frac{\varrho(\mathbf{d}) \sqrt{d_3/X'}}{(d_1d_2d_3)^2}$$

et V' l'image de V par la transformation $\delta_3 \leftrightarrow 1 - \delta_3$. Nous montrons $R(X) \ll L_\infty^\varepsilon (\log X)^2$. En effet, nous écrivons $\varrho(\mathbf{d})/d_1d_2d_3 = (h * r)(\mathbf{d})$ et nous intervertissons les sommes. Il vient

$$R(X) \leq \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{N}^3 \\ k_i \leq X'^{1/2} \\ k_3 \leq X'}} \frac{|h(\mathbf{k})|}{k_1k_2k_3} \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^3 \\ m_i \leq X'^{1/2}/k_i \\ m_3 \leq X'/k_3}} \frac{r(\mathbf{m}) \sqrt{m_3k_3/X'}}{m_1m_2m_3},$$

avec $i = 1, 2$. La somme intérieure en \mathbf{m} est majorée par $O(L_\infty^\varepsilon (\log X)^2)$ ce qui fournit la majoration souhaitée pour $R(X)$ grâce au Lemme 4. En rassemblant ces résultats, nous obtenons

$$S(X; V) = \text{vol}(\mathcal{R}) X^2 (M(X; V) + M(X; V')) + O(L_\infty^\varepsilon r_\infty r' X^2 (\log X)^2 \log \log X).$$

Pour estimer $M(X; V)$ défini en (5.3), nous utilisons un lemme classique concernant la moyenne de convolée de fonctions arithmétiques.

Lemme 7. — Soient g et h deux fonctions arithmétiques et C, C', C'' trois constantes telles que

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{|h(d)| \log(2d)}{d} \leq C'', \quad \sum_{d \leq x} \frac{g(d)}{d} = C \log x + O(C').$$

Alors on a uniformément l'estimation

$$\sum_{n \leq x} \frac{(g * h)(n)}{n} = C \log x \sum_{d=1}^{\infty} \frac{h(d)}{d} + O(C''(C + C')).$$

Soit v une fonction de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} continument dérivable par morceaux de dérivée bornée. Alors on a uniformément l'estimation

$$\sum_{n \leq x} \frac{(g * h)(n)}{n} v\left(\frac{\log n}{\log x}\right) = C \log x \sum_{d=1}^{\infty} \frac{h(d)}{d} \int_0^1 v(t) dt + O(C''(C + C')).$$

Nous ne rédigeons pas tous les détails de la preuve de l'estimation de $M(X; V)$. Nous renvoyons le lecteur à la section 3 et reprenons certaines des notations de cette partie. Lorsque $\varepsilon > 0$, on a

$$\sum_{n \leq x} \frac{r_{\text{disc}(Q)}(n)}{n} = L(1, \chi_{\text{disc}(Q)}) \log x + O(L_{\infty}^{\varepsilon})$$

avec $\chi_{\text{disc}(Q)} = (\frac{\text{disc}(Q)}{n})$. Nous appliquons trois fois le Lemme 7 pour estimer la sommation en d_1 , d_2 et d_3 en choisissant pour g la fonction constante égale à 1 pour les deux premières et la fonction $r_{\text{disc}(Q)}$ pour la troisième fois. Nous notons 1_V la fonction caractéristique des $\delta \in V$.

Nous avons

$$\begin{aligned} M(X; V) &= \sum_{d_1 \leq Y} \sum_{d_2 \leq X'^{1/2}} \sum_{d_3 \leq X'} \frac{(h * r)(\mathbf{d})}{d_1 d_2 d_3} 1_V\left(\frac{\log d_1}{\log X'}, \frac{\log d_2}{\log X'}, \frac{\log d_3}{2 \log X'}\right) \\ &= \sum_{d_2 \leq X'^{1/2}} \sum_{d_3 \leq X'} \sum_{\substack{e_2 | d_2 \\ e_3 | d_3}} \frac{r_{\text{disc}(Q)}(e_3)}{d_2 d_3} \\ &\quad \times \sum_{d_1 \leq Y} \sum_{e_1 | d_1} \frac{h(d_1/e_1, d_2/e_2, d_3/e_3)}{d_1} 1_V\left(\frac{\log d_1}{\log X'}, \frac{\log d_2}{\log X'}, \frac{\log d_3}{2 \log X'}\right). \end{aligned}$$

Or la somme en d_1 et e_1 vaut, d'après le Lemme 4 et le Lemme 7,

$$\begin{aligned} &v\left(\frac{\log Y}{\log X'}, \frac{\log d_2}{\log X'}, \frac{\log d_3}{2 \log X'}\right) \log X' \sum_{k_1 \in \mathbb{N}} \frac{h(k_1, d_2/e_2, d_3/e_3)}{k_1} \\ &\quad + O\left(\sum_{k_1 \in \mathbb{N}} \frac{|h(k_1, d_2/e_2, d_3/e_3)| \log(2k_1)}{k_1}\right), \end{aligned}$$

où $v(x, t_2, t_3) := \int_{t_1 \leq x} 1_V(t_1, t_2, t_3) dt_1$, donc

$$\begin{aligned} M(X; V) &= \log X' \sum_{k_1 \in \mathbb{N}} \sum_{d_2 \leq X'^{1/2}} \sum_{d_3 \leq X'} v\left(\frac{1}{2}, \frac{\log d_2}{\log X'}, \frac{\log d_3}{2 \log X'}\right) \\ &\quad \times \sum_{\substack{e_2 | d_2 \\ e_3 | d_3}} \frac{r_{\text{disc}(Q)}(e_3)}{d_2 d_3} \frac{h(k_1, d_2/e_2, d_3/e_3)}{k_1} + O(L_{\infty}^{\varepsilon} (\log X')^2 \log \log X), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'estimation

$$0 \leq v\left(\frac{1}{2}, t_2, t_3\right) - v(x, t_2, t_3) \leq \frac{1}{2} - x.$$

En réitérant deux fois cette manipulation, nous obtenons

$$M(X; V) = 2(\log X')^3 \operatorname{vol}(V \cap [0, \frac{1}{2}]^3) \prod_p \sigma_p + O(L_\infty^\varepsilon (\log X)^2 \log \log X)$$

et

$$M(X; V') = 2(\log X')^3 \operatorname{vol}(V' \cap [0, \frac{1}{2}]^3) \prod_p \sigma_p + O(L_\infty^\varepsilon (\log X)^2 \log \log X).$$

En utilisant la majoration (5.2) pour $\operatorname{vol}(\mathcal{R})$, et en observant que

$$\operatorname{vol}(V \cap [0, \frac{1}{2}]^3) + \operatorname{vol}(V' \cap [0, \frac{1}{2}]^3) = \operatorname{vol}(V \cap [0, \frac{1}{2}]^2 \times [0, 1]) = \operatorname{vol}(V),$$

nous obtenons l'estimation recherchée au Théorème 2.

6. Démonstration du Théorème 3

Notre démarche est, bien entendu, d'appliquer le Théorème 2. La première étape permet de se ramener au cas où $(D_i, \ell_i) = 1$ et $(D_3, q) = 1$. Avec la notation (2.9), nous avons $\Lambda(\mathbf{D}; L_1, L_2, Q) = \Lambda(\mathbf{D}'; L_1^*, L_2^*, Q^*)$, avec la notation (2.10). Posant

$$\Lambda^*(\mathbf{D}') := \{\mathbf{x} \in \Lambda(\mathbf{D}'; L_1^*, L_2^*, Q^*) : (x_1, x_2, D'_1 D'_2 D'_3) = 1\}, \quad (6.1)$$

nous avons

$$\Lambda(\mathbf{D}') = \bigsqcup_{b|\psi(\mathbf{D}')} b\Lambda^*(\mathbf{D}''; L'_1, L'_2, Q')$$

et

$$\psi(\mathbf{D}') = \prod_{p|D'_1 D'_2 D'_3} p^{\max\{v_p(D'_1), v_p(D'_2), \lceil v_p(D'_3)/2 \rceil\}}$$

où

$$\mathbf{D}'' = \left(\frac{D'_1}{(D'_1, b)}, \frac{D'_2}{(D'_2, b)}, \frac{D'_3}{(D'_3, b^2)} \right)$$

et

$$L'_i = \frac{bL_i}{(d_i, b)}, \quad Q' = \frac{b^2 Q}{(d_3, b^2)}.$$

Il en découle

$$S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}; V) = \sum_{b|\psi(\mathbf{D}')} \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda^*(\mathbf{D}'') \cap (X/b)\mathcal{R}} \tau\left(\frac{L'_1(\mathbf{x})}{d'_1}, \frac{L'_2(\mathbf{x})}{d'_2}, \frac{Q'(\mathbf{x})}{d'_3}; V\right)$$

où

$$\mathbf{d}' = \left(\frac{d_1}{(d_1, b)}, \frac{d_2}{(d_2, b)}, \frac{d_3}{(d_3, b^2)} \right).$$

Soient $D' = D'_1 D'_2 D'_3$ et $D'' = D''_1 D''_2 D''_3$. Nous partitionnons en classes d'équivalence disjointes. Lorsque \mathbf{x} et $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2$ satisfont $(\mathbf{x}, D'') = (\mathbf{y}, D'') = 1$, nous définissons la relation d'équivalence par $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbf{x} \equiv \lambda \mathbf{y} \pmod{D''}$. C'est une relation d'équivalence et les λ doivent vérifier $(\lambda, D'') = 1$. Nous notons $\mathcal{U}(D'')$ cet ensemble de classes d'équivalence et pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$ fixé avec $\mathcal{A} \in \mathcal{U}(D'')$, il est facile de vérifier

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 : \mathbf{x} \equiv a\mathbf{y} \pmod{D''} \text{ avec } a \in \mathbb{Z} \text{ où } (a, D'') = 1\}.$$

Posant

$$\mathcal{V}(\mathbf{D}'') = \{\mathcal{A} \in \mathcal{U}(D'') : \mathcal{A} \subseteq \Lambda^*(\mathbf{D}'')\},$$

nous définissons pour $\mathcal{A} \in \mathcal{V}(\mathbf{D}'')$ et $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{A}$

$$G(\mathcal{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 : \exists a \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \mathbf{x} \equiv a\mathbf{y}_0 \pmod{D''}\}.$$

L'ensemble $G(\mathcal{A})$ est un réseau de dimension 2 de déterminant D'' et $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} \in G(\mathcal{A}) : (\mathbf{x}, D'') = 1\}$. Nous pouvons donc écrire

$$S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}; V) = \sum_{b|\psi(\mathbf{D}')} \sum_{\mathcal{A} \in \mathcal{V}(\mathbf{D}'')} \sum_{e|D''} \mu(e) T(X, \mathcal{A}, e; V) \quad (6.2)$$

où

$$T(X, \mathcal{A}, e; V) := \sum_{\mathbf{x} \in G_e(\mathcal{A}) \cap (X/b)\mathcal{R}} \tau\left(\frac{L'_1(\mathbf{x})}{d'_1}, \frac{L'_2(\mathbf{x})}{d'_2}, \frac{Q'(\mathbf{x})}{d'_3}; V\right)$$

avec

$$\begin{aligned} G_e(\mathcal{A}) &= G(\mathcal{A}) \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 : e \mid \mathbf{x}\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 : \exists a \in e\mathbb{Z} \text{ tel que } \mathbf{x} \equiv a\mathbf{y}_0 \pmod{D''}\}. \end{aligned}$$

Nous sommes ainsi ramenés à un comptage sur un réseau de déterminant $D''e$. Préparons maintenant l'utilisation du Théorème 2 pour estimer $T(X, \mathcal{A}, e; V)$. Pour cela, nous définissons E un changement de variables de sorte que

$$\mathbf{x} \in G_e(\mathcal{A}) \iff \mathbf{x} = E\mathbf{v} \text{ avec } \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2,$$

où $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ est la matrice de changement dans une base minimale de vecteurs. Ainsi $|\mathbf{e}_1|$ et $|\mathbf{e}_2|$ sont les minima successifs des normes des éléments du réseau $G_e(\mathcal{A})$. Puisque $G_e(\mathcal{A}) \subseteq \delta(\mathbf{D})$, nous avons

$$\delta(\mathbf{D}) \leq |\mathbf{e}_1| \leq |\mathbf{e}_2|, \quad |\mathbf{e}_1| \cdot |\mathbf{e}_2| \gg \det G_e(\mathcal{A}) = D''e. \quad (6.3)$$

Posant $\mathcal{R}'_E := \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 : E\mathbf{v} \in \mathcal{R}/b\}$, nous avons

$$\text{vol}(\mathcal{R}'_E) = \frac{\text{vol}(\mathcal{R})}{b^2 \det E} = \frac{\text{vol}(\mathcal{R})}{b^2 D''e}.$$

Nous pouvons écrire

$$T(X, \mathcal{A}, e; V) = \sum_{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{R}'_E} \tau(M_1(\mathbf{v}), M_2(\mathbf{v}), M_3(\mathbf{v}); V)$$

avec $M_i(\mathbf{v}) = L'_i(E\mathbf{v})/d'_i$, $M_3(\mathbf{v}) = Q'(E\mathbf{v})/d'_3$. Les quantités intervenant dans le terme d'erreur du Théorème 2 satisfont les inégalités suivantes. D'une part

$$\begin{aligned} r'(\mathbf{M}, \mathcal{R}'_E) &= \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{R}'_E} \max\{|M_1(\mathbf{v})|, |M_2(\mathbf{v})|, \sqrt{|M_3(\mathbf{v})|}\} \\ &= \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}/b} \max\{|L'_1(\mathbf{x})|/d'_1, |L'_2(\mathbf{x})|/d'_2, \sqrt{|Q'(\mathbf{x})|/d'_3}\} \\ &= \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}} \max\{|L_1(\mathbf{x})|/d_1, |L_2(\mathbf{x})|/d_1, \sqrt{|Q(\mathbf{x})|/d_3}\} \\ &= r'_\mathbf{d}(L_1, L_2, Q, \mathcal{R}) = r'_\mathbf{d}, \end{aligned}$$

où

$$r'_\mathbf{d} := \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}} \max\{|L_1(\mathbf{x})|/d_1, |L_2(\mathbf{x})|/d_2, \sqrt{|Q(\mathbf{x})|/d_3}\}. \quad (6.4)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} L_\infty(\mathbf{M}) &= \max\{\|M_i\|\} \leq \max\{\|L_1\|, \|L_2\|, \|Q\|\} \|E\| \\ &\ll L_\infty(L_1, L_2, Q) D''e \leq L_\infty D^2. \end{aligned}$$

Enfin

$$r_\infty(\mathcal{R}'_E) = \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{R}'_E} \max\{|v_1|, |v_2|\} \ll \frac{r_\infty(\mathcal{R})}{b} = \frac{r_\infty}{b}.$$

Posant

$$\sigma_p(E) := \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \frac{\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}, \mathbf{M})}{p^{2\nu_1 + 2\nu_2 + 2\nu_3}},$$

le Théorème 2 fournit lorsque $r'_\mathbf{d} X^{1-2\varepsilon} \geq 1$

$$\begin{aligned} T(X, \mathcal{A}, e; V) &= 2 \operatorname{vol}(\mathcal{R}) \operatorname{vol}(V) W(E) X^2 (\log(r'_\mathbf{d} X))^3 \\ &\quad + O\left(\frac{L_\infty^\varepsilon D^\varepsilon}{b} (r_\infty r'_\mathbf{d} + r_\infty^2) X^2 (\log X)^2 \log \log X\right), \end{aligned}$$

avec

$$W(E) := \frac{1}{b^2 D'' e} \prod_p \sigma_p(E).$$

Notre tâche maintenant est de montrer que le nombre de termes sommés dans le membre de droite de (6.2) est petit.

Lemme 8. — *On a*

$$\#\mathcal{V}(\mathbf{D}) \leq 8^{\omega(D_1 D_2 D_3)} a(\mathbf{D}, \boldsymbol{\Delta}),$$

avec la notation (2.12).

Démonstration. — La relation

$$\#\mathcal{V}(\mathbf{D}) = \frac{\varrho^*(\mathbf{D})}{\varphi(D_1 D_2 D_3)} = \prod_{p^{\nu_i} \parallel D_i} \frac{\varrho^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3})}{\varphi(p^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3})}$$

permet de se restreindre à des puissances d'un nombre premier p . De plus, d'après le Lemme 2, nous avons

$$v_p(\Delta_{12}) \geq \min\{\nu_1, \nu_2\}, \quad v_p(\Delta_{i3}) \geq \min\{\nu_i, \nu_3\}$$

à moins que $\varrho^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) = 0$. Examinons deux cas, les autres s'obtenant de manière analogue. Lorsque $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \nu_3$, le Lemme 2 fournit

$$\frac{\varrho^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3})}{\varphi(p^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3})} \leq p^{\nu_3 + \min\{\nu_1, \nu_2, v_p(\Delta_{12})\}} = p^{\nu_3 + \nu_2},$$

ce qui convient. Lorsque $\nu_3 > \max\{\nu_1, \nu_2\}$, le Lemme 2 fournit

$$\frac{\varrho^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3})}{\varphi(p^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3})} \leq 8 p^{\nu_1 + \nu_2} p^{\min\{[v_p(\operatorname{disc}(Q))/2], [\nu_3/2]\}},$$

ce qui convient encore. □

En reportant dans (6.2), nous obtenons sous la condition $r'_\mathbf{d} X^{1-2\varepsilon} \geq 1$

$$\begin{aligned} S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}; V) &= 2 \operatorname{vol}(\mathcal{R}) \operatorname{vol}(V) W X^2 (\log(r'_\mathbf{d} X))^3 \\ &\quad + O(L_\infty^\varepsilon D^{2\varepsilon} a'(\mathbf{D}, \boldsymbol{\Delta}) (r_\infty r'_\mathbf{d} + r_\infty^2) X^2 (\log X)^2 \log \log X) \end{aligned} \quad (6.5)$$

avec

$$W := \sum_{b \mid \psi(\mathbf{D}')} \sum_{\mathcal{A} \in \mathcal{V}(\mathbf{D}'')} \sum_{e \mid D''} \mu(e) W(E).$$

Nous introduisons la fonction multiplicative ψ_0 définie par

$$\psi_0(p^{\beta_1}, p^{\beta_2}, p^{\beta_3}) = \max_{\beta \leq \max\{\beta_1, \beta_2, \lceil \beta_3/2 \rceil\}} p^{\min\{\beta, \beta_1\} + \min\{\beta, \beta_2\} + \min\{2\beta, \beta_3\} - 2\beta}. \quad (6.6)$$

On observe que lorsque D_3 est sans facteur carré, on a

$$\psi_0(D_1, D_2, D_3) = (D_1, D_2, D_3). \quad (6.7)$$

De plus, nous avons l'inégalité

$$\psi_0(D_1, D_2, D_3) \leq (D_1 D_2 D_3)^{1/2}. \quad (6.8)$$

conséquence de $\min\{\beta, \beta_1\} + \min\{\beta, \beta_2\} + \min\{2\beta, \beta_3\} \leq 2\beta + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)/2$.

Nous utiliserons

$$D''b^2 = \frac{b^2 D'}{(D'_1, b)(D'_2, b)(D'_3, b^2)} \geq \frac{D'}{\psi_0(D'_1, D'_2, D'_3)}. \quad (6.9)$$

Observons maintenant que la majoration

$$W \ll L_\infty^\varepsilon D^\varepsilon \frac{\psi_0(D'_1, D'_2, D'_3)}{D'} a'(\mathbf{D}, \mathbf{\Delta}) \ll L_\infty^\varepsilon D^\varepsilon a'(\mathbf{D}, \mathbf{\Delta}) \quad (6.10)$$

découle de la deuxième majoration du Lemme 4 et de la relation (6.9).

La quantité définie en (6.4) vérifie

$$\frac{r'}{d_1 d_2 d_3} \leq r'_d \leq r'.$$

Puisque $W \ll L_\infty^\varepsilon D^\varepsilon a'(\mathbf{D}, \mathbf{\Delta})$ d'après (6.10), on en déduit qu'on peut remplacer dans (6.5) la quantité r'_d par r' . Sous la condition supplémentaire $r'_d X^{1-2\varepsilon} \geq 1$ nous obtenons

$$\begin{aligned} S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}; V) &= 2 \operatorname{vol}(\mathcal{R}) \operatorname{vol}(V) X^2 (\log r' X)^3 W \\ &\quad + O\left((DL_\infty)^\varepsilon a'(\mathbf{D}, \mathbf{\Delta}) (r_\infty r' + r_\infty^2) X^2 (\log X)^2 \log \log X\right). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Nous constatons que, lorsque $d_1 d_2 d_3 \leq X^\varepsilon$, la condition $r'_d X^{1-2\varepsilon} \geq 1$ est une conséquence de $r' X^{1-\varepsilon} \geq 1$. Il reste à remarquer que si $d_1 d_2 d_3 > X^\varepsilon$ d'après (5.1) nous avons

$$\begin{aligned} S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}; V) &\ll S(X) \ll L_\infty^\varepsilon r_\infty^2 X^2 (\log X)^3 \\ &\ll L_\infty^\varepsilon D^\varepsilon r_\infty^2 X^2 (\log X)^2 (\log \log X). \end{aligned}$$

ce qui fournit (6.11) dans ce cas-là puisque $W \ll L_\infty^\varepsilon D^\varepsilon a'(\mathbf{D}, \mathbf{\Delta})$ d'après (6.10).

Pour obtenir le facteur $1/\delta(\mathbf{D})$ dans le terme d'erreur, il suffit de constater que

$$S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}; L_1, L_2, Q, \mathcal{R}, V) = S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}; \delta L_1, \delta L_2, \delta^2 Q, \mathcal{R}/\delta, V),$$

avec $\delta = \delta(\mathbf{D})$. La valeur de r' est alors inchangée et la quantité r_∞ est alors divisée par $\delta(\mathbf{D})$. Enfin, il est clair que les constantes obtenues dans le terme principal en facteur de $X^2 (\log r' X)^3$ sont les mêmes puisqu'elles ne dépendent pas de X .

Il est utile d'avoir une majoration uniforme de $S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}) := S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}; [0, 1]^3)$. Notre démonstration fournit facilement la majoration suivante.

Lemme 9. — Soit $\varepsilon > 0$. Lorsque L_1, L_2, Q, \mathcal{R} satisfont (H1)–(H3), \mathbf{d} et \mathbf{D} tels que $d_i \mid D_i$, on a

$$S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}) \ll (DL_\infty)^\varepsilon a'(\mathbf{D}, \mathbf{\Delta}) \left(\frac{\psi_0(D'_1, D'_2, D'_3)}{D'_1 D'_2 D'_3} (r_\infty X)^2 (\log X)^3 + \frac{(r_\infty X)^{1+\varepsilon}}{\delta(\mathbf{D})} \right),$$

où \mathbf{D}' a été défini en (2.10) et ψ_0 a été défini en (6.6) et satisfait (6.8).

Démonstration. — Dans toute la démonstration, nous omettons de signaler la dépendance en $V = [0, 1]^3$. Au vu de (6.2), il suffit de majorer $T(X, \mathcal{A}, e; V)$. Posant

$$\tau''(p^\nu) := \begin{cases} 2, & \text{si } \nu = 1, \\ (\nu + 1)^3, & \text{si } \nu \geq 2, \end{cases} \quad (6.12)$$

nous avons

$$T(X, \mathcal{A}, e; V) \leq \sum_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2 \\ v_1 \ll r_\infty X / (|\mathbf{e}_1|b) \\ v_2 \ll r_\infty X / (|\mathbf{e}_2|b)}} \tau''(M_1(\mathbf{v})M_2(\mathbf{v})M_3(\mathbf{v})).$$

Compte tenu de (6.3), le Théorème 1 de [1] fournit alors

$$T(X, \mathcal{A}, e; V) \ll \frac{(DL_\infty)^\varepsilon}{D''b^2} (r_\infty X)^2 (\log X)^3 + (DL_\infty)^\varepsilon \frac{(r_\infty X)^{1+\varepsilon}}{\delta(\mathbf{D})}.$$

Ici, nous avons utilisé les relations

$$\delta(\mathbf{D}, L_1, L_2, Q) = \delta(\mathbf{D}', L_1^*, L_2^*, Q^*) \leq b\delta(\mathbf{D}'', L_1', L_2', Q').$$

Puisque le nombre de termes sommés dans (6.2) est $O(D^\varepsilon a'(\mathbf{D}, \mathbf{\Delta}))$ et compte tenu de (6.9), nous obtenons bien la majoration annoncée. \square

La fin de la démonstration du Théorème 3 est consacrée au calcul de W . Étudions les termes sommés dans $\sigma_p(E)$. Nous rappelons les notations (2.7) et introduisons les notations suivantes

$$\begin{aligned} \mu'_i &= v_p(D'_i), & \mu''_i &= v_p(D''_i), & \lambda'_i &= v_p(d'_i), & \mu &= v_p(D), & \mu' &= v_p(D'), \\ \mu'' &= v_p(D''), & \varepsilon &= v_p(e), & \beta &= v_p(b), & \nu &= \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \end{aligned}$$

où, par souci de clarté, nous avons omis d'indiquer la dépendance en p de ces valuations.

On a

$$\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}, \mathbf{M}) = \#(\Lambda'(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \cap \mathcal{B}(p^{\nu_1+\nu_2+\nu_3}))$$

où

$$\Lambda'(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 : p^{\nu_i+\lambda_i} \mid p^\beta L_i(\mathbf{x}), p^{\nu_3+\lambda_3} \mid p^{2\beta} Q(\mathbf{x})\}$$

et

$$\mathcal{B}(p^\nu) = \{E\mathbf{v} : 0 \leq v_i < p^\nu\}.$$

Le théorème de la base adaptée permet d'affirmer qu'il existe une base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ de \mathbb{Z}^2 telle qu'il existe $(\delta_1 p^{m_1}, \delta_2 p^{m_2}) \in \mathbb{N}$ pour lequel la famille $(\delta_1 p^{m_1} \mathbf{e}_1, \delta_2 p^{m_2} \mathbf{e}_2)$ est une base de $E\mathbb{Z}^2$ et $(\delta_1 \delta_2, p) = 1$. De plus, on a $\delta_1 \delta_2 p^{m_1+m_2} = \det E = D''e$ et donc $m_1 + m_2 = \mu'' + \varepsilon$. Nous pouvons remplacer $\mathcal{B}(p^{\nu_1+\nu_2+\nu_3})$ par

$$\{\mathbf{w} = w_1 \delta_1 p^{m_1} \mathbf{e}_1 + w_2 \delta_2 p^{m_2} \mathbf{e}_2 : 0 \leq w_j < p^\nu\}$$

puis par

$$\{\mathbf{w} = w_1 p^{m_1} \mathbf{e}_1 + w_2 p^{m_2} \mathbf{e}_2 : 0 \leq w_i < p^\nu\} = \mathcal{B}'(p^{m_1+\nu}, p^{m_2+\nu})$$

où

$$\mathcal{B}'(p^{k_1}, p^{k_2}) := \{\mathbf{w}' = w'_1 \mathbf{e}_1 + w'_2 \mathbf{e}_2 \in E\mathbb{Z}^2 : 0 \leq w'_j < p^{k_j}\}.$$

Nous en déduisons les relations

$$\begin{aligned} \varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}, \mathbf{M}) &= \#(\Lambda'(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \cap \mathcal{B}'(p^{\nu+m_1}, p^{\nu+m_2})) \\ &= \frac{\#(\Lambda'(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \cap \mathcal{B}'(p^{\nu+m_1+m_2}, p^{\nu+m_1+m_2}))}{p^{m_1+m_2}} \\ &= \frac{\#(\Lambda'(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \cap \mathcal{B}'(p^{\nu+\mu''+\varepsilon}, p^{\nu+\mu''+\varepsilon}))}{p^{\mu''+\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Nous réécrivons cette relation

$$\begin{aligned} \frac{\varrho(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}, \mathbf{M})}{p^{2\nu_1+2\nu_2+2\nu_3+v_p(D''e)}} &= \frac{\#(\Lambda'(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \cap \mathcal{B}'(p^{\nu+\mu''+\varepsilon}, p^{\nu+\mu''+\varepsilon}))}{p^{2(\nu+\mu''+\varepsilon)}} \\ &= \frac{\#(\Lambda'(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \cap \mathcal{B}'(p^{\nu+\mu''+1}, p^{\nu+\mu''+1}))}{p^{2(\nu+\mu''+1)}}. \end{aligned}$$

La dernière égalité est un passage subtil de la démonstration. Pour $\varepsilon = 1$, elle est claire mais, pour $\varepsilon = 0$, il faut observer que les conditions incluses dans l'ensemble $\Lambda'(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3})$ ne dépendent que de la valeur des coordonnées modulo $p^{\nu+\mu''}$. Nous sommes maintenant en mesure de sommer par rapport à $\mathcal{A} \in \mathcal{V}(\mathbf{D}'')$ et e . Comme les termes sont multiplicatifs, il suffit de sommer $(-1)^\varepsilon \sigma_p(E) p^{-(v_p(D''e)+2\beta)}$ par rapport à p^β , $\mathcal{V}(p^{\mu''_1}, p^{\mu''_2}, p^{\mu''_3})$ et p^ε avec $\beta \leq \max\{\mu'_1, \mu'_2, \lceil \mu'_3/2 \rceil\} =: B'$ et $\varepsilon \leq \max\{1, \mu''\}$. Cette somme vaut $W = \prod_p w_p$ avec

$$w_p := \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{0 \leq \beta \leq B'} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \frac{\varrho'(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}; p^{\nu+\mu''+1})}{p^{2(\nu+\mu''+1+\beta)}}$$

où

$$\varrho'(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}; p^k) = \#\{\mathbf{w}' \in [0, p^k) : p^{N_i} \mid p^\beta L_i(\mathbf{w}'), p^{N_3} \mid p^{2\beta} Q(\mathbf{w}'), p \nmid \mathbf{w}'\}$$

avec la notation (2.7). La fonction $\varrho'(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}; p^k)/p^{2k}$ ne dépend pas de k pourvu que $k \geq \nu + 1$. Puisque $\mu'' \leq \mu' + B' - \beta$, nous pouvons écrire

$$w_p := \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \sum_{0 \leq \beta \leq B'} \frac{\varrho'(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}; p^{\nu+\mu'+1+B'-\beta})}{p^{2(\nu+\mu'+1+B')}}.$$

En faisant un changement de variables $p^\beta \mathbf{w}' = \mathbf{w}$, la valeur de β correspond à la valuation p -adique de $(p^\beta w'_1, p^\beta w'_2, \psi(p^{\mu'_1}, p^{\mu'_2}, p^{\mu'_3}))$. La somme intérieure en β vaut donc

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p^{2(\nu+\mu'+1+B')}} \#\{\mathbf{w} \in [0, p^{\nu+\mu'+1+B'}) : p^{N_i} \mid L_i(\mathbf{w}), p^{N_3} \mid Q(\mathbf{w})\} \\ &= \frac{1}{p^{2(N_1+N_2+N_3)}} \#\{\mathbf{w} \in [0, p^{N_1+N_2+N_3}) : p^{N_i} \mid L_i(\mathbf{w}), p^{N_3} \mid Q(\mathbf{w})\} \end{aligned}$$

puisque les conditions de divisibilité définissant cet ensemble ne dépendent que des valeurs des coordonnées de \mathbf{w} modulo $p^{N_1+N_2+N_3}$. Étant donné la notation (2.7), nous obtenons bien $w_p = \sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D})$ la relation recherchée.

7. Démonstration du Théorème 1

Dans toute cette partie, l'ensemble V est toujours $[0, 1]^3$ et nous n'indiquons plus ce choix. Pour relier $T(X)$ au résultat établi au Théorème 3, on commence par

montrer une formule d'éclatement qui pallie la non-complète multiplicativité de la fonction τ .

Lemme 10. — Lorsque $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$, on a

$$\tau(n_1 n_2 n_3) = \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^3 \\ d_i d_j | n_k}} \frac{\mu(d_1 d_2) \mu(d_3)}{2^{\omega((d_1, n_1)) + \omega((d_2, n_2))}} \tau\left(\frac{n_1}{d_2 d_3}\right) \tau\left(\frac{n_2}{d_1 d_3}\right) \tau\left(\frac{n_3}{d_1 d_2}\right),$$

où $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Démonstration. — Nous partons de la formule

$$\tau(nm) = \sum_{d|(n, m)} \mu(d) \tau\left(\frac{n}{d}\right) \tau\left(\frac{m}{d}\right). \quad (7.1)$$

Celle-ci se montre en remarquant que les deux membres de l'égalité sont des fonctions multiplicatives qui sont identiques sur les couples de puissances de nombre premier. Ainsi

$$\tau(n_1 n_2 n_3) = \sum_{d|(n_1 n_2, n_3)} \mu(d) \tau\left(\frac{n_1 n_2}{d}\right) \tau\left(\frac{n_3}{d}\right).$$

Le nombre de manière d'écrire $d = d_2 d_1$ avec $d_2 | n_1$ et $d_1 | n_2$ lorsque d est sans facteur carré est égal à $2^{\omega((d, n_1, n_2))} = 2^{\omega((d_1, n_1)) + \omega((d_2, n_2))}$. Il vient

$$\tau(n_1 n_2 n_3) = \sum_{d_1 d_2 | n_3, d_1 | n_1, d_2 | n_2} \frac{\mu(d_1 d_2)}{2^{\omega((d_1, n_1)) + \omega((d_2, n_2))}} \tau\left(\frac{n_1}{d_2 d_1}\right) \tau\left(\frac{n_2}{d_1 d_2}\right),$$

ce qui fournit la formule du lemme après application de (7.1) avec $n = n_1/d_2$ et $m = n_2/d_1$ pour calculer $\tau(n_1/d_2 \times n_2/d_1)$. \square

Le lemme suivant permet de minorer $\delta(\mathbf{D})$ la quantité définie en (2.8).

Lemme 11. — Lorsque (D_1, D_3) et (D_2, D_3) sont sans facteur carré, le ppcm

$$\left[\frac{(D_1, D_3)}{(D_1, D_3, \Delta_{13})}, \frac{(D_2, D_3)}{(D_2, D_3, \Delta_{23})}, \frac{(D_1, D_2)}{(D_1, D_2, \Delta_{12})} \right]$$

est un diviseur de $\delta(\mathbf{D})$.

Démonstration. — Nous rappelons la notation (2.11). Nous avons les implications

$$\begin{aligned} d | L_1(\mathbf{x}), d | L_2(\mathbf{x}) &\Rightarrow d | \Delta_{12}(x_1, x_2) \Rightarrow d/(d, \Delta_{12}) | (x_1, x_2), \\ d | L_i(\mathbf{x}), d | Q(\mathbf{x}) &\Rightarrow d | \Delta_{i3}(x_1, x_2) \Rightarrow d/(d, \Delta_{i3}) | (x_1, x_2) \end{aligned}$$

si $|\mu(d)| = 1$. Le résultat découle aisément de ces implications. \square

Appliquons maintenant le Lemme 10 aux termes sommés dans $T(X)$. Nous avons

$$T(X) = \sum_{\mathbf{e} \in \mathbb{N}^3} \mu(e_1 e_2) \mu(e_3) \sum_{\substack{\mathbf{x} \in X\mathcal{R} \\ \mathbf{x} \in \Lambda(e_2 e_3, e_1 e_3, e_1 e_2)}} \frac{1}{2^{\omega(k_1) + \omega(k_2)}} \tau\left(\frac{L_1(\mathbf{x})}{e_2 e_3}\right) \tau\left(\frac{L_2(\mathbf{x})}{e_1 e_3}\right) \tau\left(\frac{Q(\mathbf{x})}{e_1 e_2}\right)$$

où $k_1 = (e_1, L_1(\mathbf{x}))$ et $k_2 = (e_2, L_2(\mathbf{x}))$. Il vient alors

$$T(X) = \sum_{\mathbf{e} \in \mathbb{N}^3} \mu(e_1 e_2) \mu(e_3) \sum_{\substack{\mathbf{k} = (k_1, k_2, k'_1, k'_2) \in \mathbb{N}^4 \\ k_i k'_i | e_i}} \frac{\mu(k'_1) \mu(k'_2)}{2^{\omega(k_1) + \omega(k_2)}} T_{\mathbf{e}, \mathbf{k}}(X),$$

avec

$$T_{\mathbf{e},\mathbf{k}}(X) = \sum_{\mathbf{x} \in \Lambda(\mathbf{e},\mathbf{k}) \cap X\mathcal{R}} \tau\left(\frac{L_1(\mathbf{x})}{e_2 e_3}\right) \tau\left(\frac{L_2(\mathbf{x})}{e_1 e_3}\right) \tau\left(\frac{Q(\mathbf{x})}{e_1 e_2}\right),$$

où $\Lambda(\mathbf{e}, \mathbf{k}) := \Lambda([e_2 e_3, k_1 k'_1], [e_1 e_3, k_2 k'_2], e_1 e_2)$. Nous avons sous les conditions $k_i k'_i \mid e_i$ et $|\mu(e_1 e_2)| = |\mu(e_3)| = 1$, la relation $\Lambda(\mathbf{e}, \mathbf{k}) = \Lambda([e_2 e_3, k], [e_1 e_3, k], e_1 e_2)$, avec $k = k_1 k'_1 k_2 k'_2$. Ainsi la somme $T_{\mathbf{e},\mathbf{k}}(X)$ ne dépend que de k et, à $k \mid e_1 e_2$ fixé, nous avons

$$\sum_{\substack{\mathbf{k}=(k_1, k_2, k'_1, k'_2) \in \mathbb{N}^4 \\ k_i k'_i = (k, e_i)}} \frac{\mu(k'_1) \mu(k'_2)}{2^{\omega(k_1) + \omega(k_2)}} = \frac{\mu((k, e_1)) \mu((k, e_2))}{2^{\omega((k, e_1)) + \omega((k, e_2))}} = \frac{\mu(k)}{2^{\omega(k)}},$$

puisque le produit $e_1 e_2$ est sans facteur carré.

Nous avons donc

$$T(X) = \sum_{\mathbf{e} \in \mathbb{N}^3} \mu(e_1 e_2) \mu(e_3) \sum_{k \mid e_1 e_2} \frac{\mu(k)}{2^{\omega(k)}} T_{\mathbf{e},k}(X), \quad (7.2)$$

avec $T_{\mathbf{e},k}(X) = S(X, \mathbf{d}, \mathbf{D})$ et

$$\mathbf{d} = (e_2 e_3, e_1 e_3, e_1 e_2), \quad \mathbf{D} = ([e_2 e_3, k], [e_1 e_3, k], e_1 e_2). \quad (7.3)$$

Afin d'appliquer le Théorème 3, nous étudions chacune des quantités qui interviennent dans l'énoncé. Puisque

$$e_2 \mid (D_1, D_3), \quad e_1 \mid (D_2, D_3), \quad [e_3, k] \mid (D_1, D_2),$$

le Lemme 11 montre que

$$\left[\frac{e_1}{(e_1, \Delta_{23})}, \frac{e_2}{(e_2, \Delta_{13})}, \frac{[e_3, k]}{([e_3, k], \Delta_{12})} \right] \mid \delta(\mathbf{D}).$$

Puisque e_1 et e_2 sont premiers entre eux, nous obtenons

$$\frac{[e_1 e_2, e_3, k]}{([e_1 e_2, e_3, k], \Delta_{13} \Delta_{23} \Delta_{12})} \mid \left[\frac{e_1 e_2}{(e_1, \Delta_{23})(e_2, \Delta_{13})}, \frac{[e_3, k]}{([e_3, k], \Delta_{12})} \right] \mid \delta(\mathbf{D}).$$

Enfin la relation $k \mid e_1 e_2$ fournit

$$\frac{[e_1 e_2, e_3]}{([e_1 e_2, e_3], \Delta_{13} \Delta_{23} \Delta_{12})} \mid \delta(\mathbf{D}). \quad (7.4)$$

Dorénavant, les formes L_1 , L_2 et Q sont fixées et les constantes implicites dans les O dépendent des coefficients de ces formes et de supremum de la norme des éléments de \mathcal{R} . Nous pouvons donc supposer que $r' \ll r_\infty \ll 1$ d'après (5.2) et $a'(\mathbf{D}, \mathbf{\Delta}) \ll 1$.

Pour montrer une majoration de $T_{\mathbf{e},k}(X)$, on utilise la valeur de $\delta(\mathbf{D}) = \delta$ et on somme les \mathbf{x} en fonction de la valeur de $(x_1, x_2) = \delta f$ avec $f \geq 1$. Il vient

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{e},k}(X) &\leq \sum_{f \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2 \cap (X/\delta f)\mathcal{R} \\ (y_1, y_2)=1}} \tau(\delta f L_1(\mathbf{y})) \tau(\delta f L_2(\mathbf{y})) \tau(\delta^2 f^2 Q(\mathbf{y})) \\ &\leq \sum_{f \in \mathbb{N}} \tau(\delta f)^4 \sum_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2 \cap (X/\delta f)\mathcal{R} \\ (y_1, y_2)=1}} \tau(L_1(\mathbf{y})) \tau(L_2(\mathbf{y})) \tau(Q(\mathbf{y})) \\ &\leq \sum_{f \in \mathbb{N}} \tau(\delta)^4 \tau(f)^4 \sum_{\substack{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^2 \cap (X/\delta f)\mathcal{R} \\ (y_1, y_2)=1}} \tau''(L_1(\mathbf{y}) L_2(\mathbf{y}) Q(\mathbf{y})), \end{aligned}$$

où la fonction τ'' a été introduite en (6.12). D'après le Corollaire 1 de [1], la somme intérieure en \mathbf{y} est $\ll (X/\delta f)^2 (\log X)^3$ ce qui fournit d'après (7.4)

$$T_{\mathbf{e},k}(X) \ll X^2 (\log X)^3 \frac{\tau(\delta)^4}{\delta^2} \ll X^2 (\log X)^3 \frac{\tau([e_1 e_2, e_3])^4}{[e_1 e_2, e_3]^2}.$$

La contribution des \mathbf{e} dans la somme (7.2) définissant $T(X)$ tels que $e = e_1 e_2 e_3 \geq (\log X)^2$ est donc majoré pour tout $\varepsilon > 0$ fixé par

$$\begin{aligned} &\ll X^2 (\log X)^3 \sum_{e \geq (\log X)^2} \frac{\tau(e)^8}{e^2} \sum_{m^2 | e} m^2 \\ &\ll X^2 (\log X)^3 \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{\tau(m^2)^8}{m^2} \sum_{f \geq \max\{1, (\log x)^2 / m^2\}} \frac{\tau(f)^8}{f^2} \\ &\ll X^2 (\log X)^{3+\varepsilon/2} \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{\tau(m^2)^8}{m^2 + (\log x)^2} \ll X^2 (\log X)^{2+\varepsilon}, \end{aligned}$$

où $m = e/[e_1 e_2, e_3] = (e_1 e_2, e_3)$. Lorsque $e < (\log X)^2$, le Théorème 3 fournit

$$T_{\mathbf{e},k}(X) = 2 \operatorname{vol}(\mathcal{R}) X^2 (\log r' X)^3 \prod_p \sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D}) + O\left(\frac{e^\varepsilon X^2 (\log X)^2 \log \log X}{[e_1 e_2, e_3]}\right),$$

où, dans la somme $\sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D})$, le couple (\mathbf{d}, \mathbf{D}) est défini par (7.3). Comme D'_3 est sans facteur carré, nous pouvons utiliser (6.10) couplé avec (6.7). Nous avons

$$\prod_p \sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D}) \ll D^\varepsilon \frac{\psi_0(D'_1, D'_2, D'_3)}{D'} \ll \frac{e^\varepsilon (e_1 e_2, e_3) k}{[e_2 e_3, k][e_1 e_3, k] e_1 e_2} \ll \frac{e^\varepsilon (e_1 e_2, e_3) (e_3, k)}{(e_1 e_2 e_3)^2}.$$

Nous en déduisons l'estimation

$$T(X) = 2 \operatorname{vol}(\mathcal{R}) C X^2 (\log X)^3 + O(X^2 (\log X)^{2+\varepsilon}),$$

avec

$$C = \sum_{\mathbf{e} \in \mathbb{N}^3} \mu(e_1 e_2) \mu(e_3) \sum_{k | e_1 e_2} \frac{\mu(k)}{2^{\omega(k)}} \prod_p \sigma_p(\mathbf{d}, \mathbf{D}).$$

Nous nous consacrons maintenant au calcul de C . Pour des raisons de multiplicité, nous avons $C = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 C_p$ avec

$$C_p := \sum_{\substack{\boldsymbol{\varepsilon} \in \{0,1\}^3 \\ \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} = 0}} (-1)^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3} \sum_{\substack{\boldsymbol{\kappa} \\ 0 \leq \kappa_i \leq \varepsilon_i}} (-1/2)^{\kappa_1 + \kappa_2} \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \bar{\varrho}(N_1, N_2, N_3),$$

avec

$$N_1 := \max\{\kappa_1, \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \nu_1\}, \quad N_2 := \max\{\kappa_2, \varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \nu_2\}, \quad N_3 := \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \nu_3$$

et

$$\bar{\varrho}(n_1, n_2, n_3) = \bar{\varrho}_p(n_1, n_2, n_3) := \frac{\varrho(p^{n_1}, p^{n_2}, p^{n_3})}{p^{2n_1 + 2n_2 + 2n_3}}.$$

Pour simplifier les calculs nous fixons p et n'indiquons plus la dépendance en p de $\bar{\varrho}_p$. Nous intervertissons les sommations. Il vient $C_p = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} c_p(\nu)$, avec

$$\begin{aligned} c_p(\nu) = & \bar{\varrho}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) - \bar{\varrho}(\nu_1, \nu_2 + 1, \nu_3 + 1) + \frac{1}{2}\bar{\varrho}(\max\{\nu_1, 1\}, \nu_2 + 1, \nu_3 + 1) \\ & - \bar{\varrho}(\nu_1 + 1, \nu_2, \nu_3 + 1) + \frac{1}{2}\bar{\varrho}(\nu_1 + 1, \max\{\nu_2, 1\}, \nu_3 + 1) \\ & - \bar{\varrho}(\nu_1 + 1, \nu_2 + 1, \nu_3) + \frac{1}{2}\bar{\varrho}(\nu_1 + 1, \nu_2 + 2, \nu_3 + 1) \\ & + \frac{1}{2}\bar{\varrho}(\nu_1 + 2, \nu_2 + 1, \nu_3 + 1). \end{aligned}$$

Soit δ_0 la fonction caractéristique sur $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ du point 0. Nous avons

$$\begin{aligned} \bar{\varrho}(\max\{\nu_1, 1\}, \nu_2 + 1, \nu_3 + 1) = & \bar{\varrho}(\nu_1, \nu_2 + 1, \nu_3 + 1) \\ & + \delta_0(\nu_1)(\varrho(1, \nu_2 + 1, \nu_3 + 1) - \bar{\varrho}(0, \nu_2 + 1, \nu_3 + 1)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{\varrho}(\nu_1 + 1, \max\{\nu_2, 1\}, \nu_3 + 1) = & \bar{\varrho}(\nu_1 + 1, \nu_2, \nu_3 + 1) \\ & + \delta_0(\nu_2)(\varrho(\nu_1 + 1, 1, \nu_3 + 1) - \bar{\varrho}(\nu_1 + 1, 0, \nu_3 + 1)). \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} c_p(\nu) = & \bar{\varrho}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) - \frac{1}{2}\bar{\varrho}(\nu_1, \nu_2 + 1, \nu_3 + 1) \\ & + \frac{1}{2}\delta_0(\nu_1)(\varrho(1, \nu_2 + 1, \nu_3 + 1) - \bar{\varrho}(0, \nu_2 + 1, \nu_3 + 1)) \\ & - \frac{1}{2}\bar{\varrho}(\nu_1 + 1, \nu_2, \nu_3 + 1) - \bar{\varrho}(\nu_1 + 1, \nu_2 + 1, \nu_3) \\ & + \frac{1}{2}\delta_0(\nu_2)(\varrho(\nu_1 + 1, 1, \nu_3 + 1) - \bar{\varrho}(\nu_1 + 1, 0, \nu_3 + 1)) \\ & + \frac{1}{2}\bar{\varrho}(\nu_1 + 1, \nu_2 + 2, \nu_3 + 1) + \frac{1}{2}\bar{\varrho}(\nu_1 + 2, \nu_2 + 1, \nu_3 + 1). \end{aligned}$$

Nous observons des simplifications entre le premier et le cinquième terme avec une contribution égale à

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \bar{\varrho}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) - \bar{\varrho}(\nu_1 + 1, \nu_2 + 1, \nu_3) \\ = \sum_{(\nu, \nu_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2} (\bar{\varrho}(0, \nu, \nu_3) + \bar{\varrho}(\nu, 0, \nu_3) - \bar{\varrho}(0, 0, \nu_3)). \end{aligned}$$

Nous observons des simplifications entre le deuxième et le huitième terme avec une contribution égale à

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} -\frac{1}{2}\bar{\varrho}(\nu_1, \nu_2 + 1, \nu_3 + 1) + \frac{1}{2}\bar{\varrho}(\nu_1 + 2, \nu_2 + 1, \nu_3 + 1) \\ = -\frac{1}{2} \sum_{(\nu_2, \nu_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2} (\bar{\varrho}(0, \nu_2 + 1, \nu_3 + 1) + \bar{\varrho}(1, \nu_2 + 1, \nu_3 + 1)) \end{aligned}$$

de même entre le quatrième et le septième. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} C_p = & \sum_{(\nu, \nu_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2} (\bar{\varrho}(0, \nu, \nu_3) - \bar{\varrho}(0, \nu + 1, \nu_3 + 1) \\ & + \bar{\varrho}(\nu, 0, \nu_3) - \bar{\varrho}(\nu + 1, 0, \nu_3 + 1) - \bar{\varrho}(0, 0, \nu_3)) \\ = & \bar{\varrho}(0, 0, 0) + \sum_{\nu \in \mathbb{N}} (\bar{\varrho}(0, \nu, 0) + \bar{\varrho}(\nu, 0, 0) + \bar{\varrho}(0, 0, \nu)). \end{aligned}$$

Cela clôt la démonstration.

8. Démonstration des corollaires

8.1. Démonstration du Corollaire 1.— Une inversion de Möbius fournit

$$S^*(X, \mathbf{d}, \mathbf{D}; V) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(k) S(X/k, \mathbf{d}, \mathbf{D}; kL_1, kL_2, k^2Q, \mathcal{R}; V).$$

Nous appliquons le Théorème 3. Nous commençons par estimer la contribution du terme d'erreur. La valeur r' associée satisfait

$$r'(kL_1, kL_2, k^2Q, k^2\mathcal{R}) = kr'(L_1, L_2, Q, \mathcal{R}) \quad (8.1)$$

et donc l'ensemble V est le même pour tous les k . Pour chaque valeur de k , la valeur de a' associée est $\leq a'(\mathbf{D}, \mathbf{\Delta})$. Le terme d'erreur est donc

$$\ll (DL_\infty)^\varepsilon a'(\mathbf{D}, \mathbf{\Delta}) (kr_\infty r' + r_\infty^2) \frac{X^2}{k^{2-\varepsilon}} (\log X)^2 \log \log X.$$

La somme de ce terme pour $k \leq K := \log X$ est englobée dans le terme d'erreur. D'après le Lemme 9, la contribution des $k \in (K, r_\infty X]$ est majorée par

$$\begin{aligned} &\ll (DL_\infty)^\varepsilon a'(\mathbf{D}, \mathbf{\Delta}) \left((r_\infty X)^2 (\log X)^3 \sum_{k > K} k^{-2+\varepsilon} + (r_\infty X)^{1+\varepsilon} (\log X) \right) \\ &\ll (DL_\infty)^\varepsilon a'(\mathbf{D}, \mathbf{\Delta}) (r_\infty X)^2 (\log X)^{2+\varepsilon} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé $r_\infty X \geq 1$.

Il reste à évaluer la contribution du terme principal qui, compte-tenu de (8.1), vaut

$$2 \operatorname{vol}(\mathcal{R}) \operatorname{vol}(V) X^2 (\log r' X)^3 \sum_{k \leq K} \mu(k) W_k$$

avec

$$W_k := \frac{1}{k^2} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \bar{\varrho}_\kappa(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}).$$

Ici, nous avons $\kappa = v_p(k)$ et

$$\bar{\varrho}_\kappa(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}) = \frac{\#\{\mathbf{x} \in [0, p^{N_1+N_2+N_3}) : p^{N_i} \mid p^\kappa L_i, p^{N_3} \mid p^{2\kappa} Q\}}{p^{2N_1+2N_2+2N_3}},$$

avec les notations (2.7). Nous pouvons considérer la somme entière (ie sans la contrainte $k \leq K$) puisque, d'après (6.10), $W_k \ll (DL_\infty)^\varepsilon k^{-2+\varepsilon}$. Nous faisons les mêmes manipulations qu'à la fin de la démonstration du Théorème 3 sans indiquer les détails. Nous obtenons

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(k) W_k = \prod_p w_p^*$$

avec

$$w_p^* := \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \sum_{\kappa \in \{0,1\}} (-1)^\kappa \frac{\bar{\varrho}_\kappa(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3})}{p^{2\kappa}} = \sigma_p^*(\mathbf{d}, \mathbf{D})$$

avec $\sigma_p^*(\mathbf{d}, \mathbf{D})$ défini en (2.16) et (2.17). Lorsque $v_p(D) = 0$, nous avons utilisé le fait que

$$\sum_{\kappa \in \{0,1\}} (-1)^\kappa \frac{\bar{\varrho}_\kappa(1, 1, 1)}{p^{2\kappa}} = 1 - \frac{1}{p^2}.$$

Cela achève la preuve du Corollaire 1.

8.2. Démonstration du Corollaire 2.— Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, nous désignons par $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des facteurs premiers de n . Nous utilisons la notation $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23})$. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 12. — *Soit g une fonction multiplicative satisfaisant (2.19) pour un η_0 fixé. Il existe $\eta_1 \in (0, \eta_0)$ tel que*

$$\sum_{\substack{\mathbf{m}, \mathbf{s} \in \mathbb{N}^3 \\ \mathcal{P}(m_i s_i) \subseteq \mathcal{S}}} \frac{|\mu(s_1)\mu(s_2)\mu(s_3)| |g(m_1 m_2 m_3)|}{(m_1 m_2 m_3 s_1 s_2 s_3)^{1/2 - \eta_1}} \ll 1.$$

soit bornée.

Nous n'indiquons pas la preuve qui est immédiate. Notons seulement que comme \mathcal{S} est fixé, les s_i qui sont sans facteur carré sont bornés.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Corollaire 2. Introduisons les entiers m_i entièrement définis par

$$\mathcal{P}(L_i(\mathbf{x})/m_i) \cap \mathcal{S} = \mathcal{P}(Q(\mathbf{x})/m_3) \cap \mathcal{S} = \emptyset, \quad \mathcal{P}(m_i) \subseteq \mathcal{S}. \quad (8.2)$$

Puisque $(x_1, x_2) = 1$, les $L_i(\mathbf{x})/m_i$ et $Q(\mathbf{x})/m_3$ sont premiers deux à deux. Nous écrivons

$$\begin{aligned} & g(L_1(\mathbf{x}), L_2(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}); V) \\ &= \sum_{\substack{k|m_1 m_2 m_3 \\ k_i = (k, m_i)}} (1 * h)(k) \sum_{\substack{q_i | L_i(\mathbf{x})/m_i, \quad q_3 | Q(\mathbf{x})/m_3 \\ \left(\frac{\log k_1 q_1}{\log r' X}, \frac{\log k_2 q_2}{\log r' X}, \frac{\log k_3 q_3}{2 \log r' X} \right) \in V}} \prod_{j=1}^3 (1 * h)(q_j) \\ &= \sum_{\substack{k|m_1 m_2 m_3 \\ k_i = (k, m_i)}} (1 * h)(k) \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^3 \\ (d_1, d_2, d_3) = 1 \\ \mathcal{P}(d_i) \cap \mathcal{S} = \emptyset}} h(d_1 d_2 d_3) \sum_{\substack{\ell_i d_i | L_i(\mathbf{x})/m_i, \quad \ell_3 d_3 | Q(\mathbf{x})/m_3 \\ \left(\frac{\log k_1 \ell_1 d_1}{\log r' X}, \frac{\log k_2 \ell_2 d_2}{\log r' X}, \frac{\log k_3 \ell_3 d_3}{2 \log r' X} \right) \in V}} 1, \end{aligned}$$

où dans cette formule les m_j satisfont les conditions (8.2). Nous pouvons alors écrire

$$\left(\frac{\log k_1 \ell_1 d_1}{\log r' X}, \frac{\log k_2 \ell_2 d_2}{\log r' X}, \frac{\log k_3 \ell_3 d_3}{2 \log r' X} \right) \in V \Leftrightarrow \left(\frac{\log \ell_1}{\log r' X}, \frac{\log \ell_2}{\log r' X}, \frac{\log \ell_3}{2 \log r' X} \right) \in V(\mathbf{k}, \mathbf{d}),$$

avec $\text{vol}(V(\mathbf{k}, \mathbf{d})) = \text{vol}(V) + O(\log(md)/\log X)$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} T_g^*(X; V) &= \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^3 \\ \mathcal{P}(m_j) \subseteq \mathcal{S}}} \sum_{\substack{k|m_1 m_2 m_3 \\ k_j = (k, m_j)}} (1 * h)(k) \sum_{\substack{\mathbf{d} \in \mathbb{N}^3 \\ (d_1, d_2, d_3) = 1 \\ \mathcal{P}(d_j) \cap \mathcal{S} = \emptyset}} h(d_1 d_2 d_3) \\ &\quad \times \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \Lambda(\mathbf{d}) \cap X\mathcal{R} \\ (x_1, x_2) = 1 \\ \mathcal{P}((L_1 L_2 Q)(\mathbf{x})/m_1 m_2 m_3) \cap \mathcal{S} = \emptyset}} \tau\left(\frac{L_1(\mathbf{x})}{m_1 d_1}, \frac{L_2(\mathbf{x})}{m_2 d_2}, \frac{Q(\mathbf{x})}{m_3 d_3}, V(\mathbf{k}, \mathbf{d})\right) \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^3 \\ \mathcal{P}(m_j) \subseteq \mathcal{S}}} \sum_{\substack{k|m_1 m_2 m_3 \\ k_j = (k, m_j)}} (1 * h)(k) \sum_{\substack{\mathbf{d}, \mathbf{s} \in \mathbb{N}^3 \\ (d_1, d_2, d_3) = 1 \\ \mathcal{P}(d_j) \cap \mathcal{S} = \emptyset, \mathcal{P}(s_j) \subseteq \mathcal{S}}} h(d_1 d_2 d_3) \\ &\quad \times \mu(s_1)\mu(s_2)\mu(s_3) S^*(X, \mathbf{d}', \mathbf{D}'; V(\mathbf{k}, \mathbf{d})), \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{d}' = (m_1 d_1, m_2 d_2, m_3 d_3), \quad \mathbf{D}' = (s_1 m_1 d_1, s_2 m_2 d_2, s_3 m_3 d_3).$$

Nous choisissons $M = (\log X)^{2/\eta_1}$ avec η_1 issu du Lemme 12. Nous appliquons le Corollaire 1 lorsque $d_i, s_i, m_i \leq M$ alors que nous faisons appel au Lemme 9 sinon. Rappelons que les s_i sont bornés donc ils peuvent être pris $\leq M$. La contribution du premier terme du majorant donné par le Lemme 9 avec le choix $\varepsilon < \eta_1/3$ des $\mathbf{m}, \mathbf{s}, \mathbf{d}$ tels que $\max_i \{d_i, m_i\} > M$ est donc

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\substack{\mathbf{m}, \mathbf{s}, \mathbf{d} \in \mathbb{N}^3 \\ (d_1, d_2, d_3)=1=\mu(s_i) \\ \mathcal{P}(d_i) \cap \mathcal{S} = \emptyset, \mathcal{P}(m_i s_i) \subseteq \mathcal{S}}} \frac{(m d s)^{\eta_1/2}}{\log X} |g(m) h(d) S^*(X, \mathbf{d}', \mathbf{D}')| \\ &\ll X^2 (\log X)^{2+\varepsilon} \sum_{d \in \mathbb{N}} \frac{|h(d)|}{d^{1-\eta_1}} \sum_{\substack{\mathbf{m}, \mathbf{s} \in \mathbb{N}^3 \\ |\mu(s_i)|=1 \\ \mathcal{P}(m_i s_i) \subseteq \mathcal{S}}} \frac{|g(m)|}{(m s)^{1/2-\eta_1}} \ll X^2 (\log X)^{2+\varepsilon} \end{aligned}$$

avec $m = m_1 m_2 m_3$, $s = s_1 s_2 s_3$ et $d = d_1 d_2 d_3$. Ici, nous avons utilisé la majoration $\tau(d)^2 \ll d^{\eta_1/6}$.

Nous utilisons la relation $md \ll X$ sous la forme $1 \ll (X/md)^{1-3\varepsilon}$. La contribution du second terme du majorant donné par le Lemme 9 des $\mathbf{m}, \mathbf{s}, \mathbf{d}$ est

$$\ll X^{1+\varepsilon} \sum_{\substack{\mathbf{m}, \mathbf{d} \in \mathbb{N}^3 \\ (d_1, d_2, d_3)=1 \\ \mathcal{P}(d_i) \cap \mathcal{S} = \emptyset, \mathcal{P}(m_i) \subseteq \mathcal{S}}} |g(m) h(d)| (md)^\varepsilon \ll X^{2-\varepsilon} \sum_{\substack{m, d \in \mathbb{N}^3 \\ \mathcal{P}(m) \subseteq \mathcal{S}}} \frac{|g(m) h(d)|}{(md)^{1-4\varepsilon}} \ll X^{2-\varepsilon},$$

pourvu que $1 - 4\varepsilon \geq \frac{1}{2} - \eta_0$.

Puisque $\text{vol}(V(\mathbf{k}, \mathbf{d})) = \text{vol}(V) + O(\log \log X / \log X)$, la contribution du terme principal du Corollaire 1 est

$$2 \text{vol}(\mathcal{R}) \text{vol}(V) X^2 (\log r' X)^3 C^*$$

avec

$$C^* = \sum_{\substack{\mathbf{m}, \mathbf{s}, \mathbf{d} \in \mathbb{N}^3 \\ (d_1, d_2, d_3)=1 \\ \mathcal{P}(d_i) \cap \mathcal{S} = \emptyset, \mathcal{P}(m_i s_i) \subseteq \mathcal{S}}} g(m_1 m_2 m_3) h(d_1 d_2 d_3) \mu(s_1) \mu(s_2) \mu(s_3) W(\mathbf{s}, \mathbf{m}, \mathbf{d}).$$

Ici, nous avons étendu la somme au $\max_i \{d_i, s_i, m_i\} > M$ en majorant $W(\mathbf{s}, \mathbf{m}, \mathbf{d})$ grâce à (6.10). La même méthode que ci-dessus fournit un terme d'erreur acceptable.

Il reste à vérifier la valeur de C^* . Posons

$$\bar{\varrho}^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) = \frac{\varrho^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3})}{p^{2\nu_1+2\nu_2+2\nu_3}} \quad (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \geq 1)$$

et $\bar{\varrho}^*(1, 1, 1) = 1 - 1/p^2$. En écrivant la somme définissant C^* sous forme de produit eulérien, nous obtenons

$$C^* = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^3 C_p^*$$

avec C_p^* ayant deux expressions suivant que $p \in \mathcal{S}$. Lorsque $p \in \mathcal{S}$, nous avons

$$C_p^* = \sum_{\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} g(p^{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}) \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \{0,1\}^3} (-1)^{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \bar{\varrho}^*(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3})$$

avec la relation $N_i = \max\{\sigma_i + \mu_i, \mu_i + \nu_i\}$ alors que lorsque $p \notin \mathcal{S}$ nous avons

$$C_p^* = \sum_{\substack{\delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 \\ \#\{i : \delta_i \geq 1\} \leq 1}} h(p^{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}) \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \bar{\varrho}^*(p^{\delta_1 + \nu_1}, p^{\delta_2 + \nu_2}, p^{\delta_3 + \nu_3}).$$

Lorsque $p \notin \mathcal{S}$, nous avons $\bar{\varrho}^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) = 0$ quand $\#\{i : \nu_i \geq 1\} \geq 2$. Nous obtenons après changement d'indices

$$\begin{aligned} C_p^* &= \sum_{\nu' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \bar{\varrho}^*(p^{\nu'_1}, p^{\nu'_2}, p^{\nu'_3}) \sum_{\substack{\delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 \\ \#\{i : \delta_i \geq 1\} \leq 1 \\ 0 \leq \delta_i \leq \nu'_i}} h(p^{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}) \\ &= \sum_{\nu' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \bar{\varrho}^*(p^{\nu'_1}, p^{\nu'_2}, p^{\nu'_3}) \sum_{\substack{\delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 \\ 0 \leq \delta_i \leq \nu'_i}} h(p^{\delta_1 + \delta_2 + \delta_3}) \\ &= \sum_{\nu' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} (g * \mu)(p^{\nu'_1 + \nu'_2 + \nu'_3}) \bar{\varrho}^*(p^{\nu'_1}, p^{\nu'_2}, p^{\nu'_3}), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation $h * 1 = g * \mu$. Grâce à (2.18), nous obtenons

$$\begin{aligned} C_p^* &= \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 \\ \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \geq 1}} g(p^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}) \sum_{\sigma \in \{0,1\}^3} (-1)^{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} \bar{\varrho}^*(p^{\nu_1 + \sigma_1}, p^{\nu_2 + \sigma_2}, p^{\nu_3 + \sigma_3}) \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} g(p^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}) \bar{\varrho}_p^\dagger(\nu_1, \nu_2, \nu_3). \end{aligned}$$

Lorsque $p \in \mathcal{S}$, nous obtenons après changement d'indices

$$C_p^* = \sum_{N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} \bar{\varrho}^*(p^{N_1}, p^{N_2}, p^{N_3}) \sum_{\substack{\mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 \\ \mu_i \leq N_i}} g(p^{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}) \sum_{\substack{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3, \sigma \in \{0,1\}^3 \\ \max\{\nu_i, \sigma_i\} = N_i - \mu_i}} (-1)^{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}.$$

ce qui fournit encore grâce à (2.18) et une interversion des sommations

$$C_p^* = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} g(p^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}) \bar{\varrho}_p^\dagger(\nu_1, \nu_2, \nu_3).$$

Notons $\mu_\nu(n)$ la fonction multiplicative en n définie, lorsque $r = \#\{i : \nu_i \geq 1\}$, par

$$\mu_\nu(p^n) = \begin{cases} \mu(p^n), & \text{si } n = 0 \text{ ou } r \leq 1, \\ -r, & \text{si } n = 1, r \geq 2, \\ 1, & \text{si } n = 2, r = 2, \\ 3, & \text{si } n = 2, r = 3, \\ 0, & \text{si } n \geq 3, r = 2, \\ -1, & \text{si } n = 3, r = 3, \\ 0, & \text{si } n \geq 4. \end{cases}$$

Lorsque $p \nmid \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}$, la condition $\varrho^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3}) \neq 0$ implique $\mu_\nu(p^n) = \mu(p^n)$ et ainsi nous avons

$$(g * \mu_\nu)(p^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}) = (1 * h)(p^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}).$$

Or

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3 \\ \max\{\nu_i, \sigma_i\} = N_i - \mu_i}} (-1)^{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} = \mu(p^{N_1 - \mu_1}) \mu(p^{N_2 - \mu_2}) \mu(p^{N_3 - \mu_3}),$$

et lorsque $\nu_j \leq N_j$ nous avons

$$\mu_{\mathbf{N}}(p^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}) = \sum_{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3} \mu(p^{N_1 - \mu_1}) \mu(p^{N_2 - \mu_2}) \mu(p^{N_3 - \mu_3}).$$

Il est facile alors d'en déduire la formule

$$C_p^* = \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3} (g * \mu_{\boldsymbol{\nu}})(p^{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3}) \frac{\varrho^*(p^{\nu_1}, p^{\nu_2}, p^{\nu_3})}{p^{2\nu_1 + 2\nu_2 + 2\nu_3}}.$$

8.3. Démonstration du Corollaire 3.— Nous déduisons le Corollaire 3 du Corollaire 2 via une intégration par parties. Sa forme n'étant pas usuelle, nous fournissons quelques détails. La formule

$$\frac{1}{\max\{|x_1|, |x_2|\}^2} = 2 \int_{\max\{|x_1|, |x_2|\}}^X \frac{dt}{t^3} + \frac{1}{X^2}$$

implique après une interversion de sommation l'estimation

$$T'_g(X; V') = 2 \int_1^X \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap t\mathcal{R} \\ (x_1, x_2) = 1}} g'(L_1(\mathbf{x}), L_2(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}); V') \frac{dt}{t^3} + O((\log X)^3).$$

Puisque la contribution des $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap t/(\log t)\mathcal{R}$ est majorée par $O((\log X)^3)$, on peut remplacer la condition

$$\left(\frac{\log d_1}{\log Y}, \frac{\log d_2}{\log Y}, \frac{\log d_3}{2 \log Y}, \frac{\log \max\{|x_1|, |x_2|\}}{\log Y} \right) \in V'$$

par

$$\left(\frac{\log d_1}{\log r't}, \frac{\log d_2}{\log r't}, \frac{\log d_3}{2 \log r't} \right) \in V_{t,Y}$$

avec

$$V_{t,Y} := \left\{ \mathbf{t} \in [0, 1]^3 : \left(t_1, t_2, t_3, 1 + O\left(\frac{\log \log(3t)}{\log(3t)} \right) \right) \in \frac{\log Y}{\log r't} (V' \cap V'_0) \right\}.$$

Ici, nous avons utilisé la relation $\log r' \ll 1$. Puisque

$$\text{vol}(V_{t,Y}) = \left(\frac{\log Y}{\log r't} \right)^3 \int_{(t_1, t_2, t_3, \log t / \log Y) \in V' \cap V'_0} dt_1 dt_2 dt_3,$$

le Corollaire 2 fournit alors

$$\begin{aligned} T'_g(X; V') &= 2 \int_1^X \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^2 \cap t\mathcal{R} \\ (x_1, x_2) = 1}} g(L_1(\mathbf{x}), L_2(\mathbf{x}), Q(\mathbf{x}); V_{t,Y}) \frac{dt}{t^3} + O((\log X)^3) \\ &= 4C^* \text{vol}(\mathcal{R}) (\log Y)^3 \int_1^X \int_{(t_1, t_2, t_3, \log t / \log Y) \in V' \cap V'_0} dt_1 dt_2 dt_3 \frac{dt}{t} \\ &\quad + O((\log X)^{3+\varepsilon}) \\ &= 4C^* \text{vol}(\mathcal{R}) \text{vol}(V' \cap V'_0 (\log X / \log Y)) (\log Y)^4 + O((\log X)^{3+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Références

- [1] R. de la Bretèche and T.D. Browning, Sums of arithmetic functions over values of binary forms. *Acta Arith.* **125** (2006), 291–304.
- [2] R. de la Bretèche and T.D. Browning, Binary linear forms as sums of two squares. *Compositio Math.* **144** (2008), 1375–1402.
- [3] R. de la Bretèche and T.D. Browning, Manin’s conjecture for quartic del Pezzo surfaces with a conic fibration, *soumis* (2008).
- [4] S. Daniel, On the divisor-sum problem for binary forms. *J. Reine Angew. Math.* **507** (1999), 107–129.
- [5] D.R. Heath-Brown, Linear relations amongst sums of two squares. *Number theory and algebraic geometry*, 133–176, Lond. Math. Soc. Lecture Note Ser. **303** CUP, 2003.
- [6] G. Marasingha, On the representation of almost primes by pairs of quadratic forms. *Acta Arith.* **124** (2008), 327–355.
- [7] G. Marasingha, Almost primes represented by sets of quadratic and linear forms, *soumis* (2008).

September 8, 2009

R. DE LA BRETÈCHE, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7 Denis
Diderot, Case Postale 7012, 2, Place Jussieu, F-75251 Paris cedex 05, France
E-mail : `breteche@math.jussieu.fr`

T.D. BROWNING, School of Mathematics, University of Bristol, Bristol, BS8 1TW, United Kingdom
E-mail : `t.d.browning@bristol.ac.uk`